岩手医科大学　最後の一題

問題

三角錐ABCDにおいて，

$$AB=BC=CA=1,\ DA=DB=DC=d$$

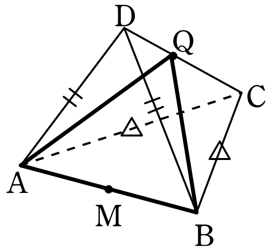
が成り立っている。ただし，$d>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする。

問　点Pが辺AB上を動き，点Qが辺CD上を動くとき，PQの長さの最小値は

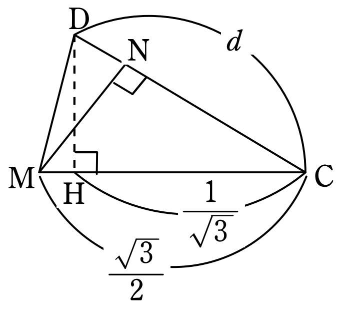
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}<d<\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}} \text{ のとき，} \sqrt{d^2-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}} \\ \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}\leqq d \text{ のとき，} \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{d^2}} \end{cases}$$

である。

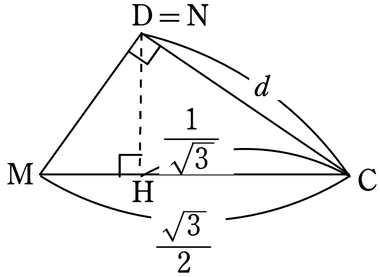
解答・解説



まず，Qを固定して考える。
3点A，B，Qを含む平面について，点PがQからABに下ろした垂線の足となるとき，PQは最小となる。
このとき，DA＝DB，CA＝CBよりAQ＝BQとなり，QからABに下ろした垂線の足は，ABの中点Mである。



次に，Qを動かしたときにMQが最小となるときを考える。
M，D，Cを含む平面に注目する．MからCDに下ろした垂線の足をNとする．Nが線分CD上にあるとき，MQが最小となるのは Q＝N のときであり，Nが線分CD上にないとき，MQはQ＝D のとき最小になる.



NとDが一致するとき，すなわち
∠MDC＝90° のとき

$$\triangle DCM \backsim \triangle HCD$$

よって

$$CD:CM=CH:CD$$

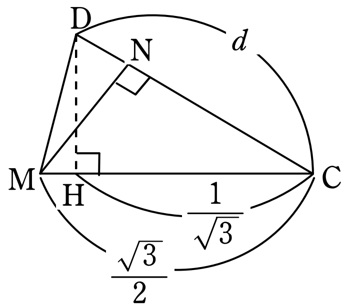
$$d:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}:d$$

$$d^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ d=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

（ｉ） $d \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

Nは線分CD上にあるので　　$MQ \geqq MN$

このとき，右図から



$$DH=\sqrt{d^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{d^2-\frac{1}{3}}$$

であり，$\triangle CMN \backsim \triangle CDH$ であるから，

$$CM : MN = CD : DH$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} : MN = d : \sqrt{d^2-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \quad MN=\frac{1}{d}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{d^2-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{3-\frac{1}{d^2}}$$

（ii） $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<d<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$Q=D$ のとき最小となるから　　$MQ=MD=\sqrt{d^2-\dfrac{1}{4}}$

以上より，求める線分PQの長さの最小値は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}<d<\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } & \sqrt{d^2-\dfrac{1}{4}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq d \text{ のとき } & \dfrac{1}{2}\sqrt{3-\dfrac{1}{d^2}} \end{cases}$$

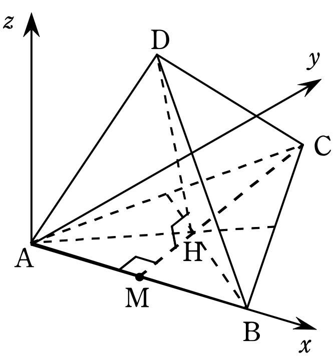
別解

図形的な考察が難しい場合は，**PQの長さを関数で表して最小値を求める**ことも出来ます。図形的な解法に比べて計算は少し多くなりますが，文字定数の場合分けには気づきやすいです。

xyz 空間を考え，Aを原点，B$(1,\ 0,\ 0)$ とすると

$$C\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$

であり，ABの中点をMとして



$$CH=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad MH=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$DH=\sqrt{CD^2-CH^2}=\sqrt{d^2-\frac{1}{3}}$$

であるから

$$D\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ \sqrt{d^2-\frac{1}{3}}\right)$$

となる。

ここでPがABを$s:(1-s)$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ に内分するとすると　　P$(s,\ 0,\ 0)$

またQがCDを$t:(1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とすると

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}t,\ \sqrt{d^2-\frac{1}{3}}\cdot t\right) \quad \left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$$

と表せるので

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)^2+\left(\sqrt{d^2-\frac{1}{3}}\cdot t\right)^2$$

$$=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+d^2\cdot t^2-t+\frac{3}{4}$$

$$=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+d^2\cdot\left(t-\frac{1}{2d^2}\right)^2+\frac{3}{4}-\frac{1}{4d^2}$$

ここでtを固定してsの2次関数とみると

$0 \leqq s \leqq 1$ より $s=\frac{1}{2}$ のとき最小

となる。次にtを動かすと，$0 \leqq t \leqq 1$ より

(i)　$(0<)\ \frac{1}{2d^2} \leqq 1 \iff d \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$　のとき

$t=\frac{1}{2d^2}$ のとき $\overline{\mathrm{PQ}}^2$ は最小となり

最小値：$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4d^2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\sqrt{3-\frac{1}{d^2}}$

(ii)　$\frac{1}{2d^2}>1 \iff \frac{1}{\sqrt{2}}>d\left(>\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき

このとき $t=1$ のとき$\overline{\mathrm{PQ}}^2$ は最小となり

最小値：$\overline{\mathrm{PQ}}^2=d^2-1+\frac{3}{4}=d^2-\frac{1}{4}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{d^2-\frac{1}{4}}$

以上より，求める線分PQの長さの最小値は

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}<d<\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } \sqrt{d^2-\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq d \text{ のとき } \frac{1}{2}\sqrt{3-\frac{1}{d^2}} \end{cases}$$