# 東京慈恵会医科大学　最後の一題

問題

$\triangle$ABC において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とする。
辺 AB を $x:1-x$ $(0\leqq x<1)$ の比に内分する点 P と，辺 AC を $y:1-y$ $(0\leqq y<1)$ の比に内分する点 Q をとり，線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。ただし，辺 AB，辺 AC を $0:1$の比に内分する点とは，ともに点 Aのこととする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R が $\triangle$AMN に含まれるような $(x,\ y)$ 全体を $xy$ 平面に図示せよ。

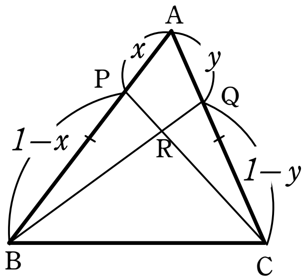
(2) (1) で描かれた領域の面積を求めよ。

解答

$0<x<1$，$0<y<1$ のとき，メネラウスの定理により

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{1-y}{1}=1$$

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}=\frac{1-x}{x(1-y)}$$




よって　$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{x(1-y)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-x)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-x+x(1-y)}$$

$$=\frac{1}{1-xy}\left\{x(1-y)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-x)y\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}$$

$$=\frac{2x(1-y)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{2(1-x)y}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AN}}\quad(x=0,\ y=0\text{でも成立})$$

ここで，$0\leqq x<1$，$0\leqq y<1$ から

$$x(1-y)\geqq 0,\ (1-x)y\geqq 0,\ 1-xy>0$$

したがって，点 R が $\triangle$AMN に含まれるための条件は

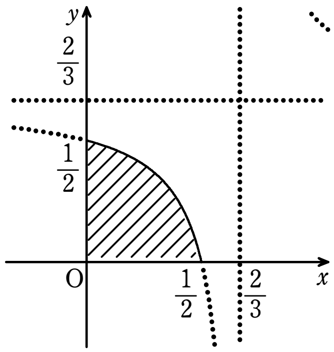
$$\frac{2x(1-y)}{1-xy}+\frac{2(1-x)y}{1-xy}\leqq 1$$

$1-xy>0$ であるから

$$2x-2xy+2y-2xy\leqq 1-xy$$

$$3xy-2x-2y+1\geqq 0$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(y-\frac{2}{3}\right)\geqq\frac{1}{9}$$




ただし，$0\leqq x<1$，$0\leqq y<1$

となるから，$(x,\ y)$ の存在範囲は右図のようになる．ただし境界線上を含む．

したがって，求める面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{9\left(x-\frac{2}{3}\right)}\right\}dx=\left[\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\log\left(\frac{2}{3}-x\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\log 2$$