東京女子医科大学　最後の一題

問題

$x \geqq 0$ のとき，関数$g(x)$ を $g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\tan t - x|dt$ と定める。このとき，$g(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解説・解説

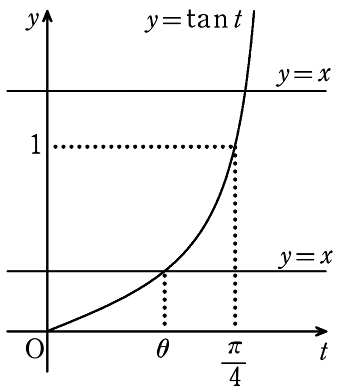
［ i ］ $x \geqq 1$ のとき

$\tan t - x \leqq 0$ であるから

$$g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-\tan t)dt$$

$$=x\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}x-\frac{1}{2}\log 2$$



［ ii ］ $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$x=\tan t$，$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$ となる t を

$t=\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$$g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\tan t - x|dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\tan t-\tan\theta|dt$$

$$=\int_0^{\theta}(\tan\theta-\tan t)dt+\int_\theta^{\frac{\pi}{4}}(\tan t-\tan\theta)dt$$

$$=\Big[(\tan\theta)t+\log|\cos t|\Big]_0^\theta+\Big[-\log|\cos t|-(\tan\theta)t\Big]_\theta^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\theta\tan\theta+2\log\cos\theta+\frac{1}{2}\log 2-\frac{\pi}{4}\tan\theta$$

$x \geqq 1$ のとき， $g(x)$ は単調に増加するから $x=1$ のとき最小値 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$ をとる.

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき,

$$g(x)=h(\theta)=2\theta\tan\theta+2\log\cos\theta+\frac{1}{2}\log 2-\frac{\pi}{4}\tan\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

とおくと

$$h'(\theta)=2\tan\theta+\frac{2\theta}{\cos^2\theta}-2\tan\theta-\frac{\pi}{4\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\pi}{4\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$h'(\theta)=0$ とすると　　$\theta=\dfrac{\pi}{8}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ における $h(\theta)$ の増減表は右のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{8}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$h'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$h(\theta)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって，$h(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ で最小値をとる。

ここで，$a=\tan\dfrac{\pi}{8}$ とおくと

$$\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2a}{1-a^2}$$

$$1=\frac{2a}{1-a^2}$$

$$a^2+2a-1=0 \qquad \therefore\ a=\sqrt{2}-1\ (\because\ 0<a<1)$$

また
$$h\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\cdot\frac{\pi}{8}a+2\log\cos\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\log2-\frac{\pi}{4}a$$
$$=\log\cos^2\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\log2$$
$$=\log\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\log\sqrt{2}=\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

よって，$h(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ で最小値 $\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。

すなわち，$g(x)$ は $x=\sqrt{2}-1$ で最小値 $\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。

$$\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}<\frac{1}{2}\log2<\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log2$$

より，$g(x)$ は $x=\sqrt{2}-1$ で最小値 $\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。