順天堂大学医学部　最後の一題

問題

箱の中に1からNまでの番号が1つずつ書かれたN枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを1枚取り出して戻すという試行をk回行う。このとき，初めからj回目$(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$までに取り出したカードの番号の和を$X_j$とし，$X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_k$のうちのどれかが$k$となる確率を$P_N(k)$とする。

(1)　$N \geqq 3$ のとき，$P_N(3)$ をNで表すと，$\dfrac{\left(N+\boxed{\text{ア}}\right)^2}{N^3}$ である。

(2)　$P_3(5)$ は，$\dfrac{\boxed{\text{イウエ}}}{\boxed{\text{オカキ}}}$ である。

(3)　$k \leqq N$ のとき，$P_N(k)$ をNとkで表すと，$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{N}\left(\boxed{\text{ケ}}+\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{N}\right)^{k-1}$ である。

解答

j回目に取り出したカードの番号をx_jとすると

$$X_j = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_j$$

である。

(1)　$X_1=3$ となるのは，$x_1=3$ の1通り

$X_2=3$ となるのは，$(x_1,\ x_2)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の2通り

$X_3=3$ となるのは，$x_1=x_2=x_3=1$ の1通り

したがって

$$P_N(3)=\frac{1}{N}+\frac{2}{N^2}+\frac{1}{N^3}=\frac{(N+1)^2}{N^3}$$

(2)　$X_2=5$ のとき　$(x_1,\ x_2)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

$X_3=5$ のとき　$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2),\ (1,\ 3,\ 1),\ (2,\ 1,\ 2),$
$(2,\ 2,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1)$

$X_4=5$ のとき　$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 2,\ 1),\ (1,\ 2,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 1)$

$X_5=5$ のとき　$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$

よって求める確率は

$$P_3(5)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 6+\left(\frac{1}{3}\right)^4\times 4+\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$=\frac{121}{243}$$

(3)　N 枚のカードについて，$X_i=k$ となる確率を $P_N(X_i=k)$ と表す。

つまり，

$$P_N(k)=P_N((X_1=k)\cup(X_2=k)\cup\ \cdots\cdots\ \cup(X_k=k))$$

このとき，$X_1=k$，$X_2=k$，……，$X_k=k$ のうち，どの 2 つも互いに排反であるから

$$P_N(k)=P_N(X_1=k)+P_N(X_2=k)+\ \cdots\cdots\ +P_N(X_k=k)$$

である。

まず，$1\leqq i\leqq k$ のとき，$x_1+x_2+\ \cdots\cdots\ +x_i=k$ となる $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_i)$ の組の総数を求める。

x_i は 1 以上の整数であるから，これは k 個の ○ を 1 列に並べたときにできる $k-1$ 個の隙間から $i-1$ 個を選ぶ組合せの数に等しいので，${}_{k-1}\mathrm{C}_{i-1}$ 通りである。

よって求める確率は

$$\begin{aligned}P_N(k)&=\sum_{i=1}^{k}{}_{k-1}\mathrm{C}_{i-1}\left(\frac{1}{N}\right)^{i}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}{}_{k-1}\mathrm{C}_{i-1}\left(\frac{1}{N}\right)^{i-1}\\&=\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{k-1}\end{aligned}$$