近畿大学医学部　最後の一題

問題

1辺の長さが1の正五角形 ABCDE において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{b}$ とし，対角線の長さを x とする。各対角線は5つの辺のうちどれかと平行である。

(1)　$\mathrm{BD}=x$ より $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，x で表すと $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{\text{ア}}\vec{a}+x\vec{b}$ であり，$\mathrm{BE}=x$ より内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を x で表すと $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}-x^2}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

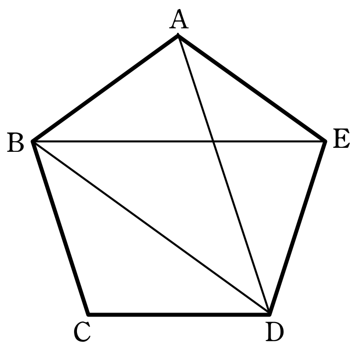
(2)　$\mathrm{AD}=x$ を用いると，x は3次方程式 $x^3-\boxed{\text{エ}}x-\boxed{\text{オ}}=0$ を満たすことがわかる。

ゆえに，$x=\dfrac{\boxed{\text{カ}}+\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(3)　正五角形の内角の大きさに注目すると $\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であることがわかる.

したがって，正五角形 ABCDE の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}}{4}$ である。

解答・解説



(1)　BD∥AE より，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=x\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=1\vec{a}+x\vec{b}$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$
$$=1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=x$ であるから　$2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=x^2$　$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2-x^2}{2}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=|\vec{a}+x\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2|\vec{b}|^2$

$$=1^2+2x\cdot\frac{2-x^2}{2}+x^2\cdot1^2=-x^3+x^2+2x+1$$

$\mathrm{AD}=x$ であるから　$x^2=-x^3+x^2+2x+1$　$\therefore\ x^3-2x-1=0$

よって　$(x+1)(x^2-x-1)=0$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(3)　正五角形の1つの内角の大きさは　$\dfrac{5-2}{5}\pi=\dfrac{3}{5}\pi$

AB＝AE より A から BE へ垂線 AH を下すと，H は BE の中点である.

$\angle\mathrm{BAE}=\dfrac{3}{5}\pi$ より $\angle\mathrm{ABE}=\dfrac{\pi}{5}$ であるから　$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

また　$\sin\dfrac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{5}}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

以上より，正五角形 ABCDE の面積は

$$\triangle\mathrm{ABE}+\triangle\mathrm{BDE}+\triangle\mathrm{BCD}$$

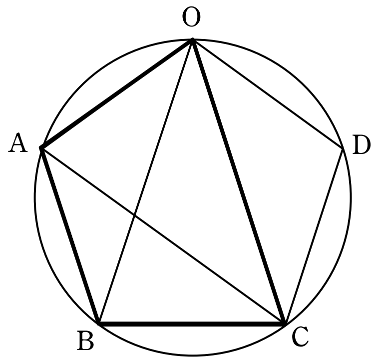
$$=2\times\frac{1}{2}\cdot1\cdot x\cdot\sin\frac{\pi}{5}+x^2\cdot\sin\frac{\pi}{5}=(x^2+1)\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1\right\}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{(30+10\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{8}=\frac{\sqrt{4^2(25+10\sqrt{5})}}{16}=\frac{\sqrt{{}^{\text{コ}}\mathbf{25+10\sqrt{5}}}}{4}$$

別解1

正五角形の対角線は，本解答のようにベクトルを用いるよりも，図形的に求める方が楽です.
特に**トレミーの定理**を用いた求め方がおすすめです.



正五角形 OABCD は円に内接するから，四角形 OABC も円に内接する.

OA＝AB＝BC＝1，OB＝OC＝AC＝x であるから，トレミーの定理により

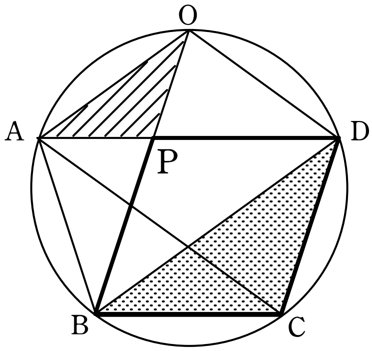
$$\mathrm{OB}\times\mathrm{AC}=\mathrm{OA}\times\mathrm{BC}+\mathrm{AB}\times\mathrm{OC}$$

$$x^2=1\cdot x+1\cdot1\qquad\therefore\ x^2-x-1=0$$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{\text{別解２}}$

正五角形が円に内接することを利用すれば，円周角の定理により等しい角が多く発見できるため，**三角形の相似**を用いることもできます．



対角線 OB，AD の交点を P とする．
正五角形 OABCD は円に内接する．
AB＝BC＝DO＝CD であるから，
円周角の定理により

$\angle AOB = \angle BDC$,

$\angle OAD = \angle DBC$

よって $\triangle POA \backsim \triangle CDB$ であるから

$PO : OA = CD : DB$ ……①

また，$OB /\!/ CD$，$AD /\!/ BC$，$CB = CD = 1$ より，
四角形 PBCD はひし形であるから

$OP = OB - PB = x - 1$

したがって ① より

$x - 1 : 1 = 1 : x$

$x(x-1) = 1 \qquad \therefore\ x^2 - x - 1 = 0$

$x > 1$ であるからあ　$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$