北里大学医学部　最後の一題

問題

w，z を 0 でない複素数，x，y を $z=w+\dfrac{1}{w}$ を満たす実数とする。

(1)　実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，z が描く軌跡を求めよ。

(2)　実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，z が描く軌跡を求めよ。

解答・解説

(1)　$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(r>0,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$z=x+yi$ とおくと

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$ であるから

$$r+\frac{1}{r}=\frac{x}{\cos\alpha},\quad r-\frac{1}{r}=\frac{y}{\sin\alpha}$$

よって　$r=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)$，$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}-\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)$

両辺の積をとると　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}-\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)=1$

$$\frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$$

また，$r>0$ であるから　$\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}>0$，$\dfrac{x}{\cos\alpha}-\dfrac{y}{\sin\alpha}>0$

このとき　$x\geqq 2\cos\alpha$

よって求める軌跡は　双曲線 $\dfrac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\dfrac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$ の $x\geqq 2\cos\alpha$ の部分　である.

(2)　$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$\frac{1}{w}=w^{-1}=\frac{1}{R}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

$$=\frac{1}{R}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

よって

$$w+\frac{1}{w}=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ とおくと，実部と虚部を比較して

$$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta,\quad y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$R>1$ であるから　　$R+\dfrac{1}{R}\fallingdotseq 0$，$R-\dfrac{1}{R}\fallingdotseq 0$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{x}{R+\frac{1}{R}},\quad \sin\theta=\frac{y}{R-\frac{1}{R}}$$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ とで，求める軌跡は　　楕円 $\dfrac{x^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$