杏林大学医学部　最後の一題

問題

複素数平面上に4点O，A，B，Pがある。ただし，Oは原点とする。3点A，B，Pを表す複素数を，それぞれα，β，zとするとき，$\alpha \fallingdotseq \beta$，$|\alpha|=|\alpha-1|$，$|\beta|=|\beta-1|$，$\alpha\beta=z$が成り立つ。このとき，点Pを$(x,\ y)$とすると，$x>-y^2+\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$を満たす。

解答・解説

$|\alpha|=|\alpha-1|$より，αは0，1を結ぶ線分の垂直二等分線上に存在するから，
実数aを用いて

$$\alpha=\frac{1}{2}+ai$$

と表せる．同様に$|\beta|=|\beta-1|$より，実数bを用いて

$$\beta=\frac{1}{2}+bi$$

と表せる。ただし，$\alpha \fallingdotseq \beta$より$a \fallingdotseq b$である．
x，yを実数として，$z=x+yi$とすると，$\alpha\beta=z$より

$$\left(\frac{1}{2}+ai\right)\left(\frac{1}{2}+bi\right)=x+yi$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4}-ab+\frac{1}{2}(a+b)i=x+yi$$

a，bは実数であるから，$\dfrac{1}{4}-ab$，$\dfrac{1}{2}(a+b)$も実数であり

$$x=\frac{1}{4}-ab,\quad y=\frac{1}{2}(a+b)$$

$$\therefore \quad a+b=2y,\quad ab=\frac{1}{4}-x$$

よって，解と係数の関係により，a，bはtの2次方程式

$$t^2-2yt+\frac{1}{4}-x=0$$

の2解である．
この方程式の判別式をDとすると，a，bは実数であり$a \fallingdotseq b$であるから　　$D>0$
したがって　　$\dfrac{D}{4}=y^2-\left(\dfrac{1}{4}-x\right)>0$

$$\therefore \quad x>-y^2+\frac{1}{4}$$

コメント

　最低限次の式からは軌跡を読み取れるようにしておくとよいでしょう.

z, α, β は複素数で, $\alpha \neq \beta$ であるとする.

①　$|z-\alpha|=|z-\beta|$　　2点 α, β を結ぶ線分の垂直二等分線

②　$|z-\alpha|=r$　　中心 α, 半径 r の円

軌跡が読み取りづらい式は, 上の２式への変形を試みます. それがうまくいかないようであれば, 今回の問題の解答のように, $z=x+yi$ とおいて, 成分（実部・虚部）に関する方程式や, 媒介変数表示を導いて考えることになります.