## 昭和大学医学部　最後の一題

問題

$a$，$m$ は自然数で $a$ は定数とする。$xy$ 平面上の点 $(a,\ m)$ を頂点とし，原点と点 $(2a,\ 0)$ を通る放物線を考える。この放物線と $x$ 軸で囲まれる領域の面積を $S_m$，この領域の内部および境界線上にある格子点の数を $L_m$ とする。このとき，極限値 $\lim_{m\to\infty}\dfrac{L_m}{S_m}$ を求めよ。

ただし，$xy$ 平面上の格子点とはその点の $x$ 座標と $y$ 座標がともに整数となる点のことである。

解答・解説

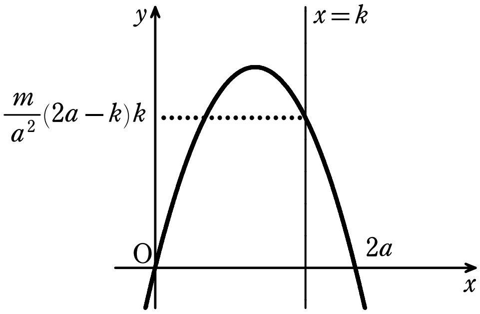
放物線の方程式を $y=px(x-2a)$ とすると，点 $(a,\ m)$ を通るから

$$m=-a^2p$$

$$p=-\frac{m}{a^2}$$

放物線の方程式は,

$$y=\frac{m}{a^2}(2a-x)x \quad \cdots①$$




ここで，① と $x=k$ の交点の $y$ 座標は

$$y=\frac{m}{a^2}(2a-k)k$$

したがって

$$L_m=\sum_{k=0}^{2a}\left\{\left[\frac{m}{a^2}(2a-k)k\right]+1\right\}$$　（$[x]$ は実数 $x$ を超えない最大の整数を表す）

と表せる。

また,

$$S_m=\int_0^{2a}ydx=\int_0^{2a}\frac{m}{a^2}(2a-x)xdx=\frac{1}{6}\cdot\frac{m}{a^2}(2a)^3=\frac{4am}{3}$$

と表せる。

ここで $x-1<[x]\leqq x$ が成り立つから

$$\frac{m}{a^2}(2a-k)k-1<\left[\frac{m}{a^2}(2a-k)k\right]\leqq\frac{m}{a^2}(2a-k)k$$

$$\therefore\ \frac{m}{a^2}(2a-k)k<\left[\frac{m}{a^2}(2a-k)k\right]+1\leqq\frac{m}{a^2}(2a-k)k+1$$

各辺の $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 2a$ における和をとると

$$\sum_{k=0}^{2a}(2a-k)k=2a\cdot\frac{2a(2a+1)}{2}-\frac{1}{6}\cdot 2a(2a+1)(4a+1)=\frac{1}{3}a(4a^2-1)$$

であるから

$$\frac{m}{3a}(4a^2-1)<L_m\leqq\frac{m}{3a}(4a^2-1)+2a+1$$

が成り立つ。

したがって

$$\frac{4a^2-1}{4a^2}<\frac{L_m}{S_m}\leqq\frac{4a^2-1}{4a^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{2a+1}{am}\right)$$

よって

$$\lim_{m\to\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{2a+1}{am}\right)=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}=1-\frac{1}{4a^2}$$

**コメント**

ガウス記号に関する極限計算では，以下の不等式によりはさみうちの原理を用いる方法が定石です．確認しておきましょう．

$x$ を実数，$[x]$ を $x$ を超えない最大の整数とすると

$$[x]\leqq x<[x]+1 \quad\Leftrightarrow\quad x-1<[x]\leqq x$$

が成り立つ．