東邦大学医学部　最後の一題

問題

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，その外部に点 F$(a,\ 0)$ をとるとする。
点 Q が C の周全体を動くとき，

線分 FQ の垂直二等分線上の点 $(x,\ y)$ は，$\dfrac{\left(x-\dfrac{a}{\boxed{ア}}\right)^2}{\left(\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{a^2-\boxed{エ}}}{2}\right)^2}\leqq 1$

を満たす。

解答・解説

Q$(X,\ Y)$ とおく．線分 FQ の垂直二等分線上の任意の点を P$(x,\ y)$ とすると
PQ＝PF が成り立つから

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=(x-a)^2+y^2$$

$$X^2+Y^2-2xX-2yY=a^2-2ax$$

点 Q は C 上の点であるから　　$X^2+Y^2=1$　……①
よって線分 FQ の垂直二等分線の方程式は

$$2xX+2yY+(a^2-2ax-1)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

である。
ここで，

線分 FQ の垂直二等分線上の点 $(x,\ y)$ が求める領域に含まれる
$\Longleftrightarrow$ ①，② を同時に満たす $(X,\ Y)$ が存在する　……③

が成り立つから，以下 ③ を満たす条件を考える．
$(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき，②より $a=\pm 1$ となり $a>1$ に反するので不適。
$(x,\ y)\fallingdotseq(0,\ 0)$ のとき，XY 平面において ① は円，② は直線を表すから，
③ を満たす条件は

$$\frac{|a^2-2ax-1|}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\leqq 1$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$4(a^2-1)x^2-4y^2-4a(a^2-1)x\leqq-(a^2-1)^2$$

$$\therefore\quad \frac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{2}\right)^2}\leqq 1 \qquad (\because\quad a>1)$$

$\boxed{\text{別解}}$

円 C 上の点 Q を，三角関数を用いてパラメータ表示すると，文字を減らすことが出来ます。最終的に三角方程式の解の存在条件を処理します.

Q$(\cos\theta，\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，線分 FQ の垂直二等分線は,

F と Q の中点$\left(\dfrac{a+\cos\theta}{2}，\dfrac{\sin\theta}{2}\right)$を通り $\overrightarrow{\mathrm{FQ}}=(\cos\theta-a，\sin\theta)$ に垂直な直線なので

$$\begin{pmatrix}\cos\theta-a\\ \sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-\dfrac{a+\cos\theta}{2}\\ y-\dfrac{\sin\theta}{2}\end{pmatrix}=0$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta-ax+\frac{a^2-1}{2}=0 \quad \cdots \quad ①$$

である。

ここで

線分 FQ の垂直二等分線上の点$(x，y)$ が求める領域に含まれる

$\Leftrightarrow$ ① をみたす θ が $0\leqq\theta<2\pi$ に少なくとも 1 つ存在する

が成り立つ.

$(x，y)=(0，0)$ のとき，①より $a=\pm1$ となるが、これは $a>1$ に反するので不適

$(x，y)\neq(0，0)$ のとき，① は $\sin\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とすると

$$\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta+\alpha)=ax-\frac{a^2-1}{2}$$

$$\sin(\theta+\alpha)=\frac{ax-\dfrac{a^2-1}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \cdots\cdots ①'$$

したがって，①' をみたす θ が存在する条件は

$$\left|\frac{ax-\dfrac{a^2-1}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqq1$$

$$\left|ax-\frac{a^2-1}{2}\right|\leqq\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left(ax-\frac{a^2-1}{2}\right)^2\leqq x^2+y^2$$

$$\therefore\ \frac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{2}\right)^2}\leqq1 \quad (\because\ a>1)$$