東京医科大学　最後の一題

問題

a，b，c は実数の定数として，関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\begin{cases} a & (x\leqq 0) \\ \dfrac{\sin \pi x\ \sin\dfrac{\pi}{2}x(x-1)\ \sin\dfrac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2} & (0<x<1) \\ b-c\pi(x-1) & (x\geqq 1) \end{cases}$$

関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続ならば，$a=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ となり，$x=1$ で微分可能ならば,

$b=\boxed{\text{ウ}}$，$c=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ となる。

解答

関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるとき　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=f(0)$

よって　$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin \pi x \sin\dfrac{\pi}{2}x(x-1)\sin\dfrac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}=a$$

左辺について

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin \pi x \sin\dfrac{\pi}{2}x(x-1)\sin\dfrac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}x(x-1)}{\dfrac{\pi}{2}x(x-1)}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{-1}{-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

したがって　$a=\dfrac{1}{2}$

また，$f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるとき $x=1$ で連続であるから

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=f(1)$$

よって　$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin\pi x\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}=b$$

左辺について

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin\pi x\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\sin\pi x\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)}{\frac{\pi}{2}x(x-1)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\frac{\pi}{2}(x-1)}\cdot\frac{1}{4x}$$

$$=0\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=0$$

したがって　$b=0$

また，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ と $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ が

存在して，その値が等しいので，

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{-c\pi(x-1)}{x-1}=-c\pi$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin\pi x\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\pi^2x^2(x-1)^3}$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\frac{\pi}{4(x-1)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)}{\frac{\pi}{2}x(x-1)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\frac{\pi}{2}(x-1)}$$

ここで　$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\frac{\pi}{4(x-1)}=-\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}\cdot\frac{\pi}{4x}$$

よって

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1\cdot 1=-\frac{\pi}{4}$$

$$-c\pi=-\frac{\pi}{4}\qquad\qquad \therefore\quad c=\frac{1}{4}$$