2020年度　順天堂大学

【　講　評　】

例年通りの形式で出題されたが，大問１（小問集合）の計算量が少なくなり，大問３の証明問題が易しくなったため，非常に解きやすい試験であった．１次通過のためには７割～７割５分を得点したい．

$\boxed{1}$ (1)はベクトルの基本問題，(2)は空間図形の典型問題，(3)も媒介変数表示（カージオイド）の典型問題なので，どれも落とせない問題である．

$\boxed{2}$ 球の体積を半径で微分すると表面積が求まるという，よく知られた性質に関する問題であるが，目新しい問題であったため，混乱した者も少なくないだろう．問題文の意図がつかめるかがポイントとなるが，これが困難であったとしても，可能な部分は通常通り表面積を求めるなど，なるべく多く得点したい．

$\boxed{3}$ 受験生なら１度は解いたことのある問題であろう．これも絶対に落とせない問題である．

【　解　答　】

$\boxed{1}$ 小問集合【標準】

(1) ア：1,　イ：4,　ウ：3,　エ：4,　オ：1,　カ：1,　キ：3,　ク：3,　ケ：1,　コ：3,
サ：4,　シ：8,　ス：1,　セ：4,　ソ：1,　タ：3,　チ：1,　ツ：3,　テ：1,　ト：3

(2) ア：8,　イ：1,　ウ：4,　エ：2,　オ：1,　カ：5,　キ：7,　ク：1,　ケ：6,　コ：5,
サ：3,　シ：8,　ス：7,　セ：2,　ソ：1,　タ：8,　チ：7,　ツ：2,　テ：1

(3) ア：2,　イ：1,　ウ：2,　エ：2,　オ：2,　カ：6,　キ：1,　ク：6

$\boxed{2}$ 微分法・積分法（数Ⅲ）【標準】

(1) ア：2,　イ：2,　ウ：3,　エ：9,　オ：8,　カ：9,　キ：2
(2) ク：1,　ケ：2,　コ：3,　サ：2,　シ：1,　ス：3,　セ：2,　ソ：3,　タ：2
(3) チ：2,　ツ：2,　テ：2,　ト：1,　ナ：4,　ニ：2,　ヌ：1,　ネ：1

$\boxed{3}$ 微分法・積分法（数Ⅲ）【やや易】

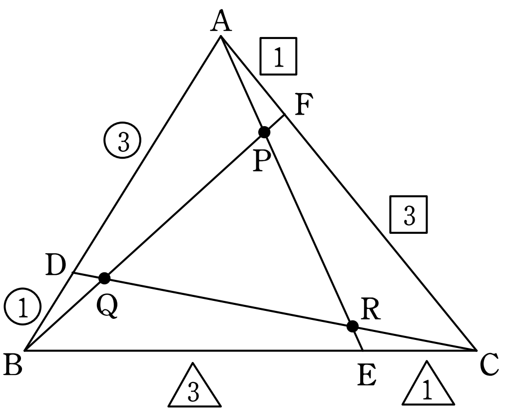
(1) 解説参照

(2) $a>1$ のとき０本，　$a=1$，$a<-\dfrac{5}{e^3}$ のとき１本，

$0\leqq a<1$，$a=-\dfrac{5}{e^3}$ のとき２本，　$-\dfrac{5}{e^3}<a<0$ のとき３本

【 解 説 】

［Ⅰ］



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}=\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$

△AEC と直線 BF にメネラウスの定理を利用して，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BE}}\cdot\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}=1$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}=1 \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{AP}}=\frac{9}{4} \quad \cdots\cdots①$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{13}\vec{b}+\dfrac{3}{13}\vec{c}$

△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を利用して，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{RA}}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{RA}}=1 \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{RE}}{\mathrm{AR}}=\frac{1}{12} \quad \cdots\cdots②$$

①，② から　$\mathrm{AP}:\mathrm{PR}:\mathrm{RE}=\mathbf{4}:\mathbf{8}:\mathbf{1}$

同様に $\mathrm{BQ}:\mathrm{QP}:\mathrm{PE}=\mathrm{CR}:\mathrm{RQ}:\mathrm{RD}=4:8:1$ となる．

△ABC の面積を S とする．△BCQ，△CAR，△ABP の面積は等しく，

$$(\triangle\mathrm{CAR}\text{の面積})=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AE}}\cdot S=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{13}\cdot S=\frac{3}{13}S$$

したがって　$(\triangle\mathrm{PQR}\text{の面積})=S-3\cdot\dfrac{3}{13}S=\mathbf{\dfrac{4}{13}}S$

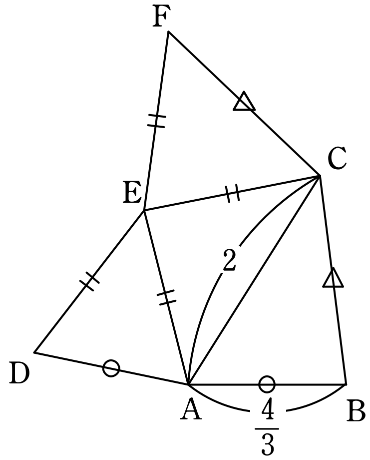
また　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{9}{13}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{9}{13}\vec{b}+\dfrac{4}{13}\cdot\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{9}{13}\vec{b}+\dfrac{1}{13}\vec{c}$，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{9}{13}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{9}{13}\vec{c}+\frac{4}{13}\cdot\frac{3}{4}\vec{b}=\frac{3}{13}\vec{b}+\frac{9}{13}\vec{c}$$

よって G は △PQR の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{13}\vec{b}+\frac{3}{13}\vec{c}+\frac{9}{13}\vec{b}+\frac{1}{13}\vec{c}+\frac{3}{13}\vec{b}+\frac{9}{13}\vec{c}\right)=\mathbf{\frac{1}{3}}\vec{b}+\mathbf{\frac{1}{3}}\vec{c}$$

(2) 1) 線分 AD の中点を G とすると，△EDG は直角三角形であり，



$$\mathrm{DG}=\mathrm{DE}\cdot\cos\angle\mathrm{ADE}$$

$$\frac{2}{3}=\mathrm{DE}\cdot\frac{\sqrt{14}}{8} \qquad \therefore\ \mathrm{DE}=\frac{16}{3\sqrt{14}}=\mathbf{\frac{8\sqrt{14}}{21}}$$

また △ABC の面積が $\dfrac{5\sqrt{7}}{12}$ であることから，

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{4}{3}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{5\sqrt{7}}{12} \qquad \therefore\ \sin\angle\mathrm{BAC}=\mathbf{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$$

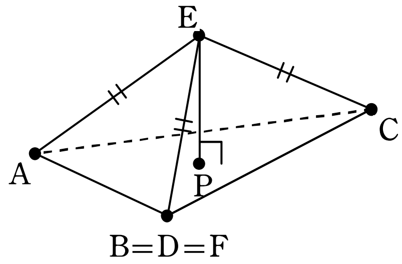
図より ∠BAC は明らかに鋭角であるから，

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-(\sin\angle\mathrm{BAC})^2}=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{7}}{16}\right)^2}=\frac{9}{16}$$

よって，△ABC に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{BC}=\sqrt{2^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{16}}=\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{9+16}}{3}=\mathbf{\frac{5}{3}}$$

ここで四面体 EABC において，EA＝EB＝EC より点 P は△ABC の外心である．外接円の半径を R とし △ABC に正弦定理を用いれば，



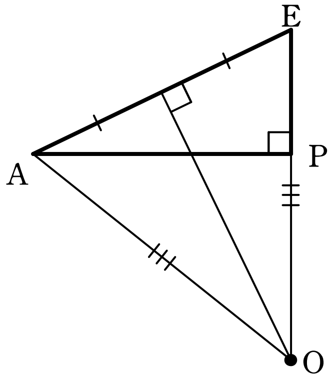
$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2R \qquad \therefore\quad \mathrm{AP}=R=\frac{\frac{5}{3}}{2\cdot\frac{5\sqrt{7}}{16}}=\frac{8\sqrt{7}}{21}$$

注意　cos∠BAC について

$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$ より $\cos\angle\mathrm{BAC}=\pm\dfrac{9}{16}$ となるが，問題文の展開図より鋭角であることが読み取れることと，$\cos\angle\mathrm{BAC}=-\dfrac{9}{16}$ を用いると空欄にあてはまらない値が求まることから，

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{9}{16}$ を用いた.

2）四面体 EABC において，EA＝EB＝EC，PA＝PB＝PC＝R より，外接球の中心 O は直線 EP 上に存在する.



△AEP に注目すると，$\mathrm{AE}=\mathrm{DE}=\dfrac{8\sqrt{14}}{21}$，$\mathrm{AP}=\dfrac{8\sqrt{7}}{21}$ より

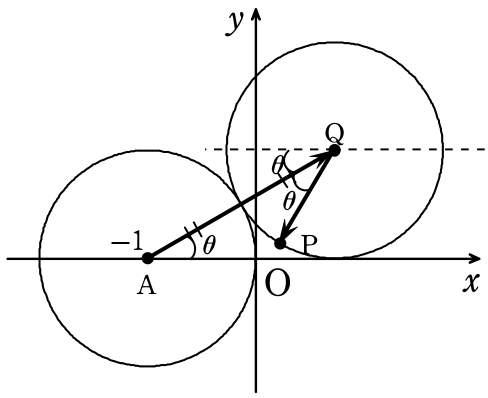
$$\sin\angle\mathrm{AEP}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\frac{\frac{8\sqrt{7}}{21}}{\frac{8\sqrt{14}}{21}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

∠AEP は鋭角であるから　　$\angle\mathrm{AEP}=45^\circ$

よって △APE は直角二等辺三角形であるから，PA＝PE が成り立ち，点 P と点 O が一致する.

したがって外接球の中心は点 P であるから，その半径は　　$\mathrm{AP}=\dfrac{8\sqrt{7}}{21}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\cos\theta\\2\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos\theta-1\\2\sin\theta\end{pmatrix}$



よって　　$\mathrm{Q}(2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta)$

また $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ が x 軸性の方向となす角は $\pi+2\theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}2\cos\theta-1\\2\sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(\pi+2\theta)\\\sin(\pi+2\theta)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cos\theta-\cos2\theta-1\\2\sin\theta-\sin2\theta\end{pmatrix}$$

よって　　$\mathrm{P}(2\cos\theta-\cos2\theta-1,\ 2\sin\theta-\sin2\theta)$

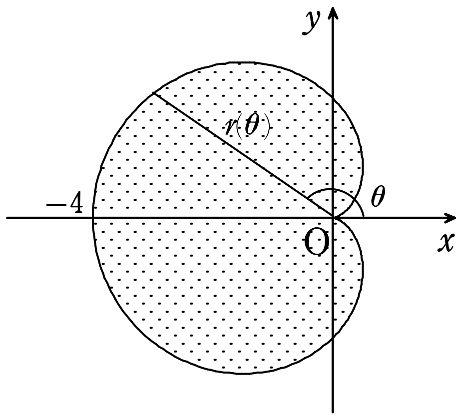
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}2\cos\theta-(2\cos^2\theta-1)-1\\2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}=2(1-\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

$2(1-\cos\theta)\geqq0$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=2(1-\cos\theta)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が x 軸の正の方向となす角は θ であることから，点 P が描く曲線は極座標で

$$r(\theta)=2-2\cos\theta$$

と表される．

点 P が描く曲線 $r=r(\theta)$ に囲まれた図形の面積 S は，



$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(2-2\cos\theta)^2d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}=6\pi$$

また，$\dfrac{dr}{d\theta}=2\sin\theta$ より曲線の長さ L は

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(2-2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta\quad\left(\because\ 0\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\pi\right)$$

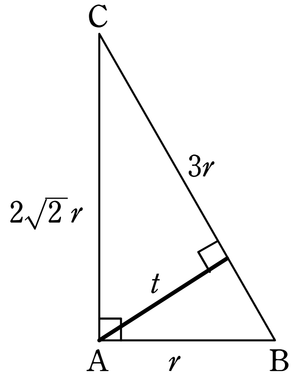
$$=4\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=4(2+2)=16$$

［Ⅱ］

(1)　$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$ より　　$\mathrm{AC}=\sqrt{(3r)^2-r^2}=2\sqrt{2}\,r$

よって△ABC の面積に注目すると

$$\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2\sqrt{2}\,r=\frac{1}{2}\cdot 3r\cdot t \qquad \therefore\ t=\frac{2\sqrt{2}\,r}{3} \quad \cdots\cdots①$$



① より　　$r=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}t$　　……②

また回転体は底面積 πr^2，高さ $2\sqrt{2}\,r$ の円錐であるから，体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\times\pi r^2\times 2\sqrt{2}\,r=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3$$

② を用いると　　$V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}t\right)^3=\dfrac{9}{8}\pi t^3$

これを t で微分したものが回転体の側面積であり　　$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{27}{8}\pi t^2$

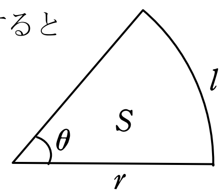
また，回転体の底面積は　　$\pi r^2=\pi\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}t\right)^2=\dfrac{9}{8}\pi t^2$

よって回転体の表面積は　　$\dfrac{27}{8}\pi t^2+\dfrac{9}{8}\pi t^2=\dfrac{9}{2}\pi t^2$

別解　回転体は円錐であるから，微分を用いずに表面積を求めてもよい．

まず，半径 R，中心角 θ の扇形について，弧の長さを l，面積を S とすると

$$l=r\theta,\quad S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$$



が成り立つことに注意する．

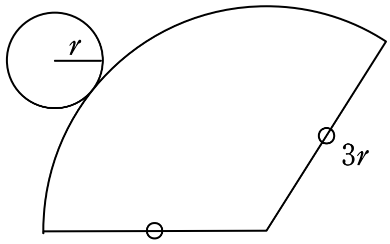
回転体の底面積は　　πr^2

回転体の側面積は半径 $3r$，弧の長さ $2\pi r$ の扇形であるから，

その面積は　　$\dfrac{1}{2}\cdot(3r)\cdot 2\pi r=3\pi r^2$

よって ② より表面積は

$$\pi r^2+3\pi r^2=4\pi r^2=4\pi\cdot\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}t\right)^2=\frac{9}{2}\pi t^2$$



参考　微分により表面積が求まる理由を簡単に示す．

t に対する体積を $V(t)$，表面積を $S(t)$ とすると，これらは t に関して単調に増加する．

$\Delta t>0$ とする．$[t,\ t+\Delta t]$ における体積の増分に注目すると

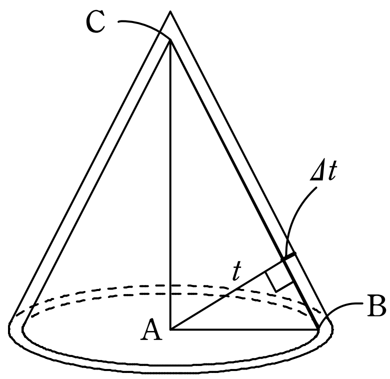
$$S(t)\cdot\Delta t\leqq V(t+\Delta t)-V(t)\leqq S(t+\Delta t)\cdot\Delta t$$

$$S(t)\leqq\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}\leqq S(t+\Delta t)$$

$\displaystyle\lim_{\Delta t\to+0}S(t+\Delta t)=S(t)$，　$\displaystyle\lim_{\Delta t\to+0}\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=V'(t)$ であるから，

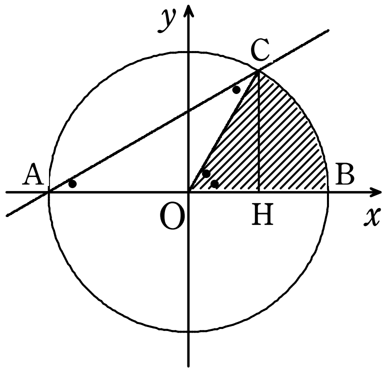
はさみうちの原理により　　$S(t)=V'(t)$

$\Delta t<0$ のときも同様に $S(t)=V'(t)$ が成り立つ．



(2)　円周角と中心角の関係より

$$\angle \mathrm{COH}=2\angle \mathrm{CAO}=\frac{\pi}{3}$$



$\mathrm{OC}=r$ であるから　　$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}r,\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$

C から x 軸へ垂線 CH を下し，△OCH の回転体の体積を V_1 とすると，

$$V_1=\frac{1}{3}\times\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2\times\frac{1}{2}r=\frac{\pi}{8}r^3$$

また，線分 CH，線分 BH，弧 BC で囲まれた部分の回転体の体積を V_2 とすると，

円 O の方程式が $x^2+y^2=r^2$ であることから

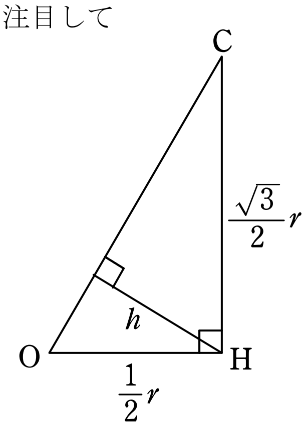
$$V_2=\int_{\frac{1}{2}r}^{r}\pi y^2dx=\pi\int_{\frac{1}{2}r}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}r}^{r}=\frac{5}{24}\pi r^3$$

よって回転体の体積は　　$V_1+V_2=\frac{1}{8}\pi r^3+\frac{5}{24}\pi r^3=\frac{1}{3}\pi r^3$

次に，線分 OC に対応する部分の側面積を S_1，弧 BC に対応する部分の側面積を S_2 とする.

H から OC へ下した垂線の長さを h とすると，△OCH の面積に注目して

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{1}{2}\cdot r\cdot h\qquad \therefore\ h=\frac{\sqrt{3}}{4}r\quad\cdots\cdots③$$



③ より　　$r=\frac{4}{\sqrt{3}}h$　　$\therefore\ \frac{dr}{dh}=\frac{4}{\sqrt{3}}$　　……④

よって S_1 は，V_1 を h で微分することで得られるから

$$S_1=\frac{d}{dh}V_1=\frac{d}{dr}V_1\cdot\frac{dr}{dh}=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{8}\pi r^3\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2$$

また，S_2 は V_1+V_2 を r で微分することで得られるから

$$S_2=\frac{d}{dr}(V_1+V_2)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{3}\pi r^3\right)=\pi r^2$$

以上より，回転体全体の表面積は　　$S_1+S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2+\pi r^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\pi r^2$

別解　側面積 S_1 は，円錐の側面積として求めても良い.

S_1 は，半径 $\mathrm{OC}=r$，弧の長さ $2\pi\mathrm{CH}=\sqrt{3}\pi r$ の扇形の面積に等しいから

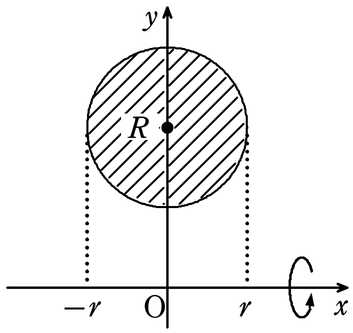
$$\frac{1}{2}\cdot r\cdot\sqrt{3}\pi r=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2$$

(3)　中心 $(0,\ R)$，半径 r の円の方程式は

$$x^2+(y-R)^2=r^2$$

これを変形すると　　$(y-R)^2=r^2-x^2$

$$\therefore\ y=\pm\sqrt{r^2-x^2}+R$$



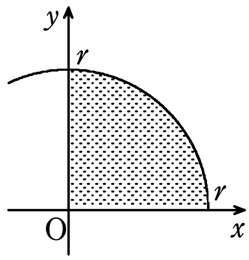
よって回転体(トーラス)の体積を W とすると，

y 軸に関して対称であることに注意して

$$V=2\pi\int_0^r\{(\sqrt{r^2-x^2}+R)^2-(-\sqrt{r^2-x^2}+R)^2\}dx$$

$$=8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ は原点中心，半径 r の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ に等しいから



$$W=8\pi R\times\frac{1}{4}\pi r^2=2\pi^2r^2R^1$$

これは r の関数とみなして r で微分したものが表面積であるから

$$\frac{d}{dr}W=4\pi^2r^1R^1$$

参考　回転体（トーラス）の体積，表面積は，パップス・ギュルダンの定理で求めることもできる．

円 $x^2+(y-R)^2=r^2$ の重心は中心 $(0,\ R)$，面積は πr^2，周の長さは $2\pi r$ であるから

パップス・ギュルダンの定理により，

体積　(重心の移動距離)×(面積)$=2\pi R\times\pi r^2=2\pi^2r^2R^1$

表面積　(重心の移動距離)×(周の長さ)$=2\pi R\times 2\pi r=4\pi^2r^1R^1$

となる．

［Ⅲ］

(1)　$x>0$ のとき不等式に $n=3$ を代入して　　$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}>\dfrac{x^3}{6}$

両辺正であるから逆数をとると　　$0<\dfrac{1}{e^x}<\dfrac{6}{x^3}$　　$\therefore\ 0<\dfrac{x^2}{e^x}<\dfrac{6}{x}$

ここで　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x}=0$

はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$　■

(2)　$f(x)=(1+x)e^x$ とおくと　　$f'(x)=1\cdot e^x+(1+x)\cdot e^x=(x+2)e^x$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(2+t)e^t(x-t)+(1+t)e^t=(2+t)e^tx+(1-t-t^2)e^t$$

これが $(0,\ a)$ を通るとき　　$a=(1-t-t^2)e^t$　……①

ここで　　$f''(x)=1\cdot e^x+(x+2)\cdot e^x=(x+3)e^x$

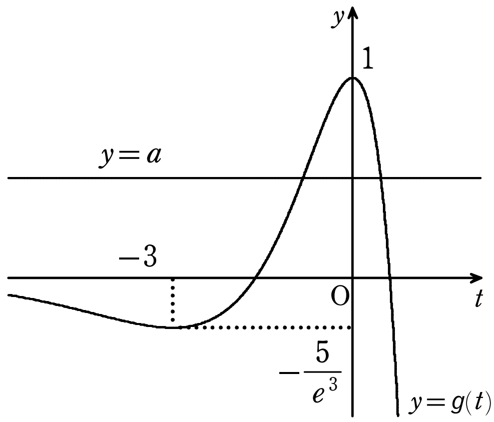
よって $y=f(x)$ は $x=-3$ において変曲点を 1 つもつ．このことから，異なる接点に対して異なる接線が対応することがわかるので，① の異なる実数解の個数が接線の本数である．

$g(t)=(1-t-t^2)e^t$　とおくと

$$g'(t)=(-1-2t)e^t+(1-t-t^2)e^t=-t(t+3)e^t$$

$g(t)$ の増減表は以下のようになる．

t	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	$-\dfrac{5}{e^3}$	↗	1	↘



(1) の結果を用いると　　$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}g(t)=0$，　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=-\infty$

よって，$y=g(t)$ のグラフは右図のようになる．

このグラフと $y=a$ との異なる共有点の個数が求める接線の本数であるから，

$a>1$ のとき 0 本，

$a=1$，$a<-\dfrac{5}{e^3}$ のとき 1 本，

$0\leqq a<1$，$a=-\dfrac{5}{e^3}$ のとき 2 本，

$-\dfrac{5}{e^3}<a<0$ のとき 3 本