解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2020年度　杏林大学

【　講　評　】

例年通り大問４題で出題された．ここ数年，微分・積分（数Ⅲ）に関する大問が２つ出題されてきたが，今年は微分・積分（数Ⅲ）に関する出題がなかった．また，数Ⅲそのものの出題が，問題Ⅳの最後の２次曲線だけと極端に少なかった．それにより計算量が減少したため，例年よりは解きやすい問題が多かった．とはいえ，時間的に厳しい試験ではある．７割弱の得点ができていれば良いだろう．

【　解　答　】

Ⅰ．整数の性質（数学A）／数列（数学B）【標準】

(a)　ア：2,　イ：0,　ウ：①,　エ：2,　オ：0,　カ：④,　キ：2,　ク：0,　ケ：⑤

(b)　コ：7,　サ：1,　シ：8,　ス：3,　セ：2,　ソ：2,　タ：1,　チ：2

Ⅱ．ベクトル（数B）／図形と計量（数Ⅰ）／図形の性質（数A）【標準】

(a)　ア：1,　イ：1,　ウ：0,　エ：2,　オ：7,　カ：2,　キ：6,　ク：7

(b)　ケ：1,　コ：4,　サ：1,　シ：3,　ス：1,　セ：4,　ソ：③

(c)　タ：1,　チ：2,　ツ：5,　テ：3,　ト：1,　ナ：3,　ニ：③

(d)　ヌ：4,　ネ：7

Ⅲ．微分法・積分法（数Ⅱ）【やや易】

(a)　ア：－,　イ：4,　ウ：8,　エ：2,　オ：7,
　カ：③,　キ：2,　ク：2,　ケ：⑤,　コ：7

(b)　サ：4,　シ：2,　ス：4,　セ：1,　ソ：1,　タ：3
　チ：－,　ツ：1,　テ：1,　ト：0,　ナ：8

(c)　ニ：3,　ヌ：2

Ⅳ．三角関数（数Ⅱ）／図形と方程式（数Ⅱ）／いろいろな曲線（数Ⅲ）【標準】

(a)　ア：4,　イ：4,　ウ：2,　エ：3,　オ：2

(b)　カ：3,　キ：2,　ク：5,　ケ：2

(c)　コ：－,　サ：1,　シ：5,　ス：3,　セ：4,　ソ：⑤,　タ：⑥,　チ：0,　ツ：6

【 解 説 】

［Ｉ］

(a)　$a_n=2\cdot9^{n-1}=2\cdot9^{n-1}+0\cdot9^{n-2}+\cdots\cdots+0\cdot9^1+0\cdot9^0$

よって　$A=2$，　$B=0$，　$m=n-1$（⓪）

また　$a_n=2\cdot3^{2n-2}+0\cdot3^{2n-3}+\cdots\cdots+0\cdot3^1+0\cdot3^0$

よって　$C=2$，　$D=0$，　$l=2n-2$（④）

さらに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1$

$=2\cdot3^{2n-2}+2\cdot3^{2n-4}+\cdots\cdots+2\cdot3^2+2$

$=2\cdot3^{2n-2}+0\cdot3^{2n-3}+2\cdot3^{2n-4}+0\cdot3^{2n-5}+\cdots\cdots+2\cdot3^2+0\cdot3^1+2\cdot3^0$

よって　$E=2$，　$F=0$，　$2n-1$ 桁（⑤）

(b)　$b_1=13_{(4)}=1\cdot4+3=7$，　$b_3=0.013_{(4)}=1\cdot4^{-2}+3\cdot4^{-3}=\dfrac{7}{64}$

$b_2>0$，$b_4>0$ であるから公比は正であり　$\dfrac{1}{8}$

よって　$b_2=\dfrac{7}{8}=3\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=3\cdot4^{-1}+2\cdot4^{-2}=0.32_{(4)}$

また　$b_4=\dfrac{7}{64}\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{2}\cdot4^{-4}=3\cdot4^{-4}+2\cdot4^{-5}=0.00032_{(4)}$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}b_k=\frac{7\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{8}}=8-\left(\frac{1}{8}\right)^4$　の整数部分が p 進法で 3 桁であることから

$$p^2\leqq8-\left(\frac{1}{8}\right)^4<p^3$$

が成立し，これを満たす 2 以上の整数 p は $p=2$ のみである．

さらに，$\left(\dfrac{1}{8}\right)^4=(2^{-3})^4=1\cdot2^{-12}$ は 2 進法で小数第 12 位が 1 で他の位の数字が 0 であるから，

これを $8=2^3=1000_{(2)}$ から引いた $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}b_k$ は，小数点以下 $j=12$ 桁まで 1 が続くことが分かる

［Ⅱ］

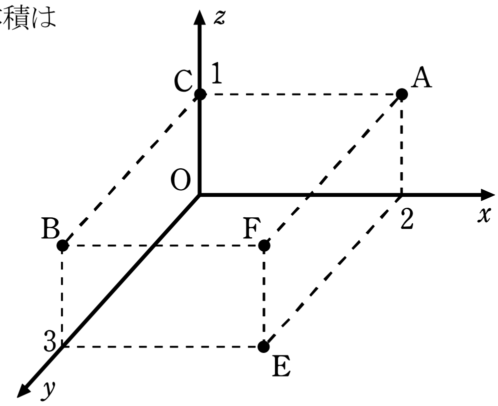
(a)　$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{OB}=(0,\ 3,\ 1)$ より　　$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{10}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$

よって　　$\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{10}\sqrt{2}$

また △OAB の面積は　　$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\cdot10-1}=\dfrac{7}{2}$

$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{CB}$ であるから，四面体 OABC の体積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OC=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot1\right)\cdot3=1$

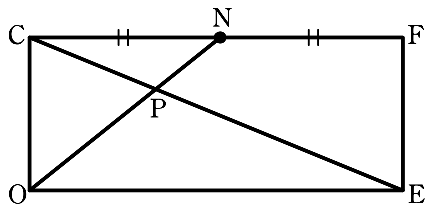


点 C から平面 AOB に下ろした垂線の足を H とし，
四面体 OABC の体積に注目すると

$1=\dfrac{1}{3}\cdot(\triangle OAB\text{ の面積})\cdot CH$

$1=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot CH$　　$\therefore\ CH=\dfrac{6}{7}$

(b)　長方形 OCFE に注目する．ただし，点 N は長方形 CBFA の対角線の交点であり，
対角線を互いに二等分する．また，$OC=EF=1$，$OE=CF=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ である．



直角三角形 OEC に注目すると　　$CE=\sqrt{13+1}=\sqrt{14}$

$\triangle POE\backsim\triangle PNC$ より　　$\dfrac{CP}{EP}=\dfrac{NC}{OE}=\dfrac{1}{2}$

よって　　$CP=\dfrac{1}{3}CE=\dfrac{1}{3}\sqrt{14}$

ON は △OAB の中線であり，$\dfrac{NP}{PO}=\dfrac{NC}{OE}=\dfrac{1}{2}$ であるから，点 P は △OAB の重心（❸）である．

別解　$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=(2,\ 3,\ -1)$ より　　$|\overrightarrow{CE}|=\sqrt{14}$

点 P は直線 CE 上より，k を実数として次のように表せる．

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{CE}=(2k,\ 3k,\ 1-k)$　……①

点 P は 平面 AOB 上より，s，t を実数として次のように表せる．

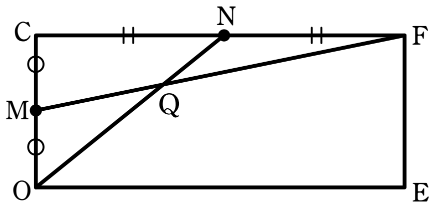
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(2s,\ 3t,\ s+t)$　……②

①，② の各成分を比較すると　　$s=k$，$t=k$，$1-k=s+t$　　$\therefore\ s=t=k=\dfrac{1}{3}$　……③

①，③より　　$|\overrightarrow{CP}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{CE}|=\dfrac{1}{3}\sqrt{14}$

また ②，③より $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ となるので，点 P は △AOB の重心（❸）である

(c)　四角形 OEFC に注目する．M は OC の中点であるから　$OM=CM=\frac{1}{2}$



直角三角形 MFC に注目すると　$MP=\sqrt{\frac{1}{4}+13}=\frac{1}{2}\sqrt{53}$

△MFC と直線 OM にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{MQ}{QF}\cdot\frac{FN}{NC}\cdot\frac{CO}{OM}=\frac{MQ}{QF}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}=1 \qquad \therefore\ \frac{MQ}{QF}=\frac{1}{2}$$

よって　$MQ=\frac{1}{3}\times MF$

また △ONC と直線 FM にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{OQ}{QN}\cdot\frac{NF}{FC}\cdot\frac{CM}{MO}=\frac{OQ}{QN}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=1 \qquad \therefore\ \frac{OQ}{QN}=\frac{2}{1}$$

このことと ON が △OAB の中線であることから，点 Q は △AOB の重心（**③**）である．

別解　M$\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$より $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(4,\ 6,\ 1)$ であるから　$|\overrightarrow{MF}|=\frac{1}{2}\sqrt{53}$

点 Q は直線 MF 上より，l を実数として次のように表せる．

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{OM}+l\overrightarrow{MF}=\left(2l,\ 3l,\ \frac{1}{2}+\frac{l}{2}\right) \quad \cdots\cdots④$$

点 Q は平面 AOB 上より，α，β を実数として次のように表せる．

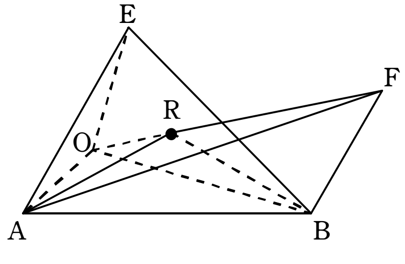
$$\overrightarrow{OQ}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=(2\alpha,\ 3\beta,\ \alpha+\beta) \quad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤ の各成分を比較すると　$\alpha=l$，$\beta=l$，$\frac{1}{2}+\frac{l}{2}=\alpha+\beta$　$\therefore\ \alpha=\beta=l=\frac{1}{3}$　……⑥

よって ④，⑥ より　$|\overrightarrow{MQ}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{MF}|$

また ⑤，⑥より $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ となるから，点 Q は △AOB の重心（**③**）である．

(d)　平面 ABE と直線 OF の交点を R とすると，明らかに点 R は △ABE の内部に存在する．
四面体 OABE と四面体 OABF は面 AOB を共有するので，$S\cap T$ は**四面体 OABR の表面および内部を表す（④）**．また $S\cup T$ は，四面体 OABE と四面体 ABFR を合わせた立体となる．



この立体の面の総数は，△ARB を数えない（△ABE の分は，四角形の面 ARBE として数える）ことに注意すると　$4+4-1=\mathbf{7}$

［Ⅲ］

(a)　$g'(x)=-4x-8$ であるから，直線 l の方程式は

$$y=(4t-8)(x-t)-2t^2-8t+7=(-4t-8)x+2t^2+7$$

これと曲線 C ：$y=f(x)$ を連立させて

$$2x^2-7=(-4t-8)x+2t^2+7 \qquad \therefore\ x^2+2(t+2)x-t^2-7=0 \quad \cdots\cdots①$$

方程式 ① の 2 解が α，β $(\alpha<\beta)$ である．

$f'(x)=4x$ であるから，点 P における C の接線の方程式は

$$y=4\alpha(x-\alpha)+2\alpha^2-7=4\alpha x-2\alpha^2-7 \quad \cdots\cdots②$$

同様に，点 Q における C の接線の方程式は　$y=4\beta x-2\beta^2-7$　$\cdots\cdots③$

②，③ を連立させて　$4\alpha x-2\alpha^2-7=4\beta x-2\beta^2-7$　$\therefore\ 2(\beta-\alpha)=\beta^2-\alpha^2$

$\alpha<\beta$ より $\beta-\alpha\neq 0$ であるから　$x=\dfrac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2(\beta-\alpha)}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　$(\because\ \alpha\neq\beta)$

② に代入すると　$y=4\alpha\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-2\alpha^2-7=2\alpha\beta-7$

よって点 R の座標は　$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ 2\alpha\beta-7\right)$（❸，❺）

(b)　① に解と係数の関係を用いると　$\alpha+\beta=-2(t+2)$，$\alpha\beta=-t^2-7$　$\cdots\cdots④$

$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2},\ 2\alpha(\alpha-\beta)\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2},\ 2\beta(\beta-\alpha)\right)$

であるから，

$$S_1=\frac{1}{2}\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\beta(\beta-\alpha)-2\alpha(\alpha-\beta)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|-\beta(\beta-\alpha)^2+\alpha(\beta-\alpha)^2\right|$$

$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots\cdots② \quad (\because\ \beta>\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(\beta-\alpha)^2}\right\}^3=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\right\}^3$$

④ を代入すると　$S_1=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{4(t+2)^2-4(-t^2-7)}\right\}^3=4\left(\sqrt{2t^2+4t+11}\right)^3$

これを変形すると　$S_1=4\left\{\sqrt{2(t+1)^2+9}\right\}^3$

$g(t)\geqq f(t)$ のとき　$2t^2+4t-7\leqq 0$　$\therefore\ \dfrac{-2-3\sqrt{2}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{-2-3\sqrt{2}}{2}<-1<\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{2}$ であるから，S_1 は $t=-1$ のとき，最小値 $4\cdot 3^3=108$ をとる．

(c)　直線 l の方程式を $y=h(x)$ とすると，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において $h(x)\geqq f(x)$ であるから，

$$S_2=\int_\alpha^\beta\{h(x)-f(x)\}dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

これと ②より　$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

参考

放物線とその 2 つの接線に関する面積に成立する関係から

$$S_2:(S_1-S_2)=2:1$$

となる．記述式での使用は推奨できないが，本問がマーク式であることを考慮すれば，

これを用いて (a) → (c) → (b) の順に解くことで，大幅に解答時間を短縮できる．

［Ⅳ］

(a)　点 P は原点 O を中心とする半径 4 の円周 C 上の点であるから　$P(4\cos t,\ 4\sin t)$

と表せる．また 2 点 A，P の中点の座標は　$\left(\dfrac{0+4\cos t}{2},\ \dfrac{6+4\sin t}{2}\right)=(2\cos t,\ 3+2\sin t)$

(b)　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=2(2\cos t,\ 2\sin t-3)$

また，線分 AP の中点を M，線分 AP 垂直二等分線上の任意の点を $Q(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM}=(x-2\cos t,\ y-2\sin t-3)$

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{MQ}$ であるから　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$

$2\cos t(x-2\cos t)+(2\sin t-3)\{y-(2\sin t+3)\}=0$

$(3-2\sin t)y=2x\cos t-4\cos^2 t-(4\sin^2 t-9)$　　$\therefore\ \left(\dfrac{3}{2}-\sin t\right)y=x\cos t+\dfrac{5}{2}$　　…①

(c)　$0\leqq t<2\pi$ より，t の方程式 ① が $0\leqq t<2\pi$ において実数解を持つときの，$(x,\ y)$ の存在範囲が求める領域である．

この式は $x=y=0$ とすると成り立たないから $x^2+y^2\neq 0$ である．

三角関数の合成により　$\sqrt{x^2+y^2}\sin(t+\theta)=\dfrac{3}{2}y-\dfrac{5}{2}$　……⑤

ただし θ は，$\sin\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を満たす.

$0\leqq t<2\pi$ のとき $\theta\leqq t+\theta<2\pi+\theta$ であるから　$|\sin(t+\theta)|\leqq 1$

よって t の方程式 ⑤ が実数解をもつ条件は　$\left|\dfrac{3}{2}y-\dfrac{5}{2}\right|\leqq\sqrt{x^2+y^2}$

両辺を 2 乗して整理すると　$4x^2-5y^2+30y\geqq 25$　$\therefore\ \dfrac{-1}{5}x^2+\dfrac{(y-3)^2}{4}\leqq 1$（❺）……④

境界線は中心が (0，3) である双曲線であることに注意すると，焦点の座標は

$(0,\ \pm\sqrt{5+4}+3)$　　$\therefore$ (0，0)，(0，6)

② に焦点の 1 つである原点の座標を代入すると　$\dfrac{(-3)^2}{4}\leqq 1$

この式は成り立たないので，② は**双曲線を境界とし，その焦点を含まない領域**を表す（❻）.

別解　① の $\cos t$，$\sin t$ を置き換えて座標平面で処理することもできる.

$\cos t=X$，$\sin t=Y$ とおくと $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ より　$X^2+Y^2=1$　……②

また ① より　$\left(\dfrac{3}{2}-Y\right)y=xX+\dfrac{5}{2}$　$\therefore\ 2xX+2yY-3y+5=0$　……③

XY 平面上で，② は 円，③ は直線を表すから，これらが共有点を持つとき，$0\leqq t<2\pi$ を満たす t は存在する．よって　$\dfrac{|-3y+5|}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\leqq 1$

両辺を 2 乗して整理すると　$\dfrac{-1}{5}x^2+\dfrac{(y-3)^2}{4}\leqq 1$（❺）　……④