解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2020 年度　日本大学（A 方式）

【講評】

例年通りの形式で出題された．大問３（空欄補充）で確率が出題されたのは目新しかったが，典型的な問題であったし，全体的に難易度が下がり，計算量も多くなかったため，高得点の勝負となるだろう．８割程度の得点をしたい．

【解答】

$\boxed{1}$ 小問集合【やや易】

(1) $\boxed{1}$: 1,　$\boxed{2}$: 3,　$\boxed{3}$: 2,　$\boxed{4}$: 1,　$\boxed{5}$: 3,　$\boxed{6}$: 5,　$\boxed{7}$: 3

(2) $\boxed{8}$: 3,　$\boxed{9}$: 2,　$\boxed{10}$: 7

(3) $\boxed{11}$: 8,　$\boxed{12}$: 3,　$\boxed{13}$: 3

(4) $\boxed{14}$: 3,　$\boxed{15}$: 1,　$\boxed{16}$: 1

$\boxed{2}$ 小問集合【やや易】

(1) $\boxed{17}$: 6,　$\boxed{18}$: 1,　$\boxed{19}$: 2,　$\boxed{20}$: 2,　$\boxed{21}$: 1,　$\boxed{22}$: 4

(2) $\boxed{23}$: 1,　$\boxed{24}$: 2,　$\boxed{25}$: 3,　$\boxed{26}$: 3,　$\boxed{27}$: 3,　$\boxed{28}$: 2

(3) $\boxed{29}$: 1,　$\boxed{30}$: 1,　$\boxed{31}$: 6,　$\boxed{32}$: 3,　$\boxed{33}$: 2

(4) $\boxed{34}$: 5,　$\boxed{35}$: 5,　$\boxed{36}$: 5,　$\boxed{37}$: 5,　$\boxed{38}$: 3,　$\boxed{39}$: 7,　$\boxed{40}$: 1

$\boxed{3}$ 確率（数学 A）【やや易】

(1) $\boxed{41}$: 1,　$\boxed{42}$: 8,　$\boxed{43}$: 9,　$\boxed{44}$: 2

(2) $\boxed{45}$: 4,　$\boxed{46}$: 0,　$\boxed{47}$: 2,　$\boxed{48}$: 4,　$\boxed{49}$: 3

(3) $\boxed{50}$: 7,　$\boxed{51}$: 3,　$\boxed{52}$: 7,　$\boxed{53}$: 2,　$\boxed{54}$: 9

$\boxed{4}$ 微分法（数学Ⅲ）【標準】

(1) $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2e^x-2)}{x^3(1+e^x)^2}$,　(2) 解説参照,　(3) $p=\dfrac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$，$q=\dfrac{e}{1+e}$

$\boxed{5}$ 微分法・積分法（数学Ⅲ）【やや易】

(1) 極大値 $\dfrac{1}{2}$ $(x=1)$，極小値 $-\dfrac{1}{2}$ $(x=-1)$,　(2) $y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$,　(3) $\dfrac{9}{16}-\dfrac{1}{2}\log 3$

【 解 説 】

［I］

(1)　$y=4x^2-7x-1$　……①，　$y=x^2-2x+1$　……②　とする．

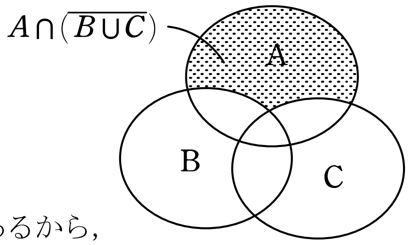
①，② を連立させて　　$(3x+1)(x-2)=0$　　$\therefore$　$x=-\dfrac{1}{3}$，2

よって ①，② の共有点の x 座標は　$x=-\dfrac{1}{3}$，**2**

また ①−②×4 より　　$-3y=x-5$　　$\therefore$　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$

これは ①，② の共有点を通る直線を表す．

(2)　$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すとする．



$A\cap B\cap C$ は 30 の倍数を表すから，　$n(A\cap B\cap C)=\left[\dfrac{100}{30}\right]=3$

$n(A\cap(\overline{B\cup C}))=n(A\cap(\overline{B}\cap\overline{C}))$

$\qquad=n(A)-\{n(A\cap B)+n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)\}$

$A\cap B$ は 6 の倍数，$A\cap C$ は 10 の倍数，$A\cap B\cap C$ は 30 の倍数であるから，

$n(A\cap(\overline{B\cup C}))=\left[\dfrac{100}{2}\right]-\left\{\left[\dfrac{100}{6}\right]+\left[\dfrac{100}{10}\right]-\left[\dfrac{100}{30}\right]\right\}=50-(16+10-3)=\mathbf{27}$

(3)　$a^4+c^2a^2-b^2c^2-b^4=0$ より　$(a^2-b^2)c^2+a^4-b^4=0$

$\therefore$ $(a^2-b^2)(c^2+a^2+b^2)=0$

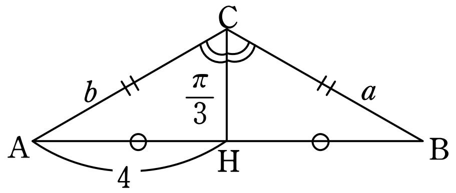
$a>0$，$b>0$，$c>0$ より $c^2+a^2+b^2>0$ であるから　　$a^2-b^2=0$　　$\therefore$ $a=b$

よって C から AB へ垂線 CH を下すと，

直角三角形 CAB において

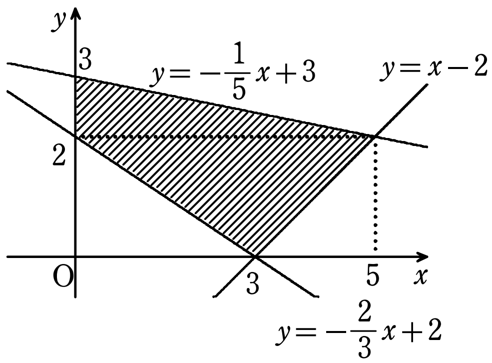
$\angle\mathrm{ACH}=60^\circ$，$\mathrm{AH}=4$

であるから　$a=b=\dfrac{4}{\sin 60^\circ}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$



(4)　連立不等式の表す領域を図示すると，右図の斜線部分となる．ただし，境界線を含む．

また，境界線 $y=-\dfrac{1}{5}x+3$ と $y=x-3$ の交点は $(5,\ 2)$ である．



$x+3y=k$ とおくと　　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{k}{3}$……①

① は傾き $-\dfrac{1}{3}$，y 切片 $\dfrac{k}{3}$ の直線を表すから，

これが連立不等式の表す領域と共有点を持つときの k の最小値，最大値を求める．

$-\dfrac{2}{3}<-\dfrac{1}{3}<-\dfrac{1}{5}$ であるから，

$(x,\ y)=(3,\ 0)$ のとき，最小値 $k=3+3\cdot 0=3$，

$(x,\ y)=(5,\ 2)$ のとき，最大値 $k=5+3\cdot 2=11$

をとる．

［Ⅱ］

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1-t+2-t+2t+3=6$

　また，$\vec{a}-\vec{b}=(-t,\ 1-t,\ 2t+2)$ であるから

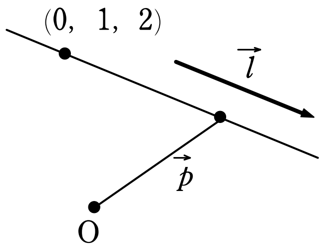
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(-t)^2+(1-t)^2+(2t+2)^2=6t^2+6t+5=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$$

　t は実数であるから $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{14}$ をとる．

別解　$\vec{a}-\vec{b}$ を直線のベクトル方程式とみて解くこともできる

$\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}=(-t,\ 1-t,\ 2t+2)=(0,\ 1,\ 2)+t(-1,\ -1,\ 2)$

$\vec{p}$ は $(0,\ 1,\ 2)$ を通り，$\vec{l}=(-1,\ -1,\ 2)$ を方向ベクトルとする直線上の点を表すから，$\vec{p}\perp\vec{l}$ のとき $|\vec{p}|$ は最小となる．



$\vec{p}\cdot\vec{l}=0$ より　$-(-t)-(1-t)+2(2t+2)=0$　$\therefore\ t=-\dfrac{1}{2}$

このとき $\vec{p}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 1\right)$ より，最小値 $|\vec{p}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{14}$ となる．

(2)　$y=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}+\cos x=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}+1-2\sin^2\dfrac{x}{2}=-2\left(\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8}\right)^2+\dfrac{33}{32}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $0\leqq\dfrac{x}{2}\leqq\pi$ であるから　$0\leqq\sin\dfrac{x}{2}\leqq 1$

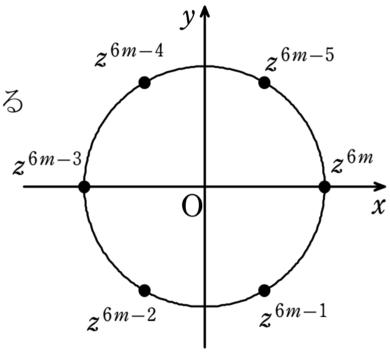
$0<\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2}$ であるから

$\sin\dfrac{x}{2}=1$ のとき，最小値 $-\dfrac{1}{2}$，$\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{8}$ のとき，最大値 $\dfrac{33}{32}$

をとる．

(3)　$z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ より　$z^n=\cos\dfrac{n}{3}\pi+i\sin\dfrac{n}{3}\pi$

　$|z^n|=1$，$\arg(z^n)=\dfrac{n}{3}\pi$ であるから，z^n は複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円に内接する，1 を 1 つの頂点とする正六角形の頂点に対応する．よって m を自然数とすると



$$a_{6m}=1,\quad a_{6m-1}=a_{6m-5}=\frac{1}{2},$$

$$a_{6m-2}=a_{6m-4}=-\frac{1}{2},\quad a_{6m-3}=-1$$

　となるから

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6=1\cdot(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{16}$$

　また $a_{6m-5}+a_{6m-4}+a_{6m-3}+a_{6m-2}+a_{6m-1}+a_{6m}=0$ であり，$2020=336\times 6+4$ であることから，

$$\sum_{n=1}^{2020}a_n=0\times 336+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

(4)　$P=a^4-25(a^2+2a+1)=a^4-25(a+1)^2$

$=\{a^2-5(a+1)\}\{a^2+5(a+1)\}=(a^2+5a+5)(a^2-5a-5)$

$|P|$ が素数となるには

$|a^2+5a+5|=1$　……①　または　$|a^2-5a-5|=1$　……②

となる必要がある.

(ⅰ) $a^2+5a+5=1$ のとき

$a^2+5a+4=0$　　$(a+4)(a+1)=0$　　$\therefore\ a=-4,\ -1$

$a=-4$ のとき，$|P|=|1\cdot(16+20-5)|=31$ は素数となるので適する.

$a=-1$ のとき，$|P|=|1\cdot(1+5-5)|=1$ は素数でないので不適である.

(ⅱ) $a^2+5a+5=-1$ のとき

$a^2+5a+6=0$ より　　$(a+2)(a+3)=0$　　$\therefore\ a=-2,\ -3$

$a=-2$ のとき，$|P|=|(-1)\cdot(4+10-5)|=9$ は素数でないので不適である.

$a=-3$ のとき，$|P|=|(-1)\cdot(9+15-5)|=19$ は素数となるので適する.

(ⅲ) $a^2-5a-5=1$ のとき

$a^2-5a-6=0$ より　　$(a-6)(a+1)=0$　　$\therefore\ a=6,\ a=-1$

$a=6$ のとき，$|P|=|(36+30+5)\cdot 1|=71$ となるので適する.

$a=-1$ のときは(ⅰ)より不適である.

(ⅳ) $a^2-5a-5=-1$ のとき

$a^2-5a-4=0$ を満たす a は整数とならないので不適である.

以上より，$|P|$ が素数となる a は 3 個であり，最大の $|P|$ は 71 である.

［Ⅲ］

2 以下の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，3 以上の目が出る確率は $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ である．

さいころを n 回振り，2 以下の目が x 回出るとき，

A 君の得点は $10+1\cdot x+2\cdot(n-x)=-x+2n+10$ ……①

B 君の得点は $6+3\cdot x+1\cdot(n-x)=2x+n+6$ ……②

となる．

(1) $n=50$ で A 君と B 君の得点がちょうど等しくなるとき，①，② より

$$-x+2\cdot50+10=2x+50+6$$

$$3x=54 \qquad \therefore\ x=18$$

このとき各自の得点は $-18+2\cdot50+10=\mathbf{92}$ である．

(2) $n=5$ で A 君と B 君の得点がちょうど等しくなるとき，①，② より

$$-x+2\cdot5+10=2x+5+6$$

$$3x=9 \qquad \therefore\ x=3$$

よって 2 以下の目が 3 回，3 以上の目が 2 回出る確率であるから，

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{40}{243}}$$

(3) $n=6$ で A 君の得点が B 君の得点よりも小さくなるとき，①，② より

$$-x+2\cdot6+10<2x+6+6 \qquad \therefore\ 3x>10$$

$1\leqq x\leqq6$ であるからこれを満たすのは　$x=4,\ 5,\ 6$

よって 2 以下の目が 4 回または 5 回または 6 回出る確率であるから

$${}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^6=\mathbf{\frac{73}{729}}$$

［IV］

(1)　$f'(x)=\dfrac{e^x x^2(1+e^x)-e^x\{2x(1+e^x)+x^2e^x\}}{x^4(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x(x-2e^x-2)}{x^3(1+e^x)^2}$

(2)

$g(x)=x-2e^x-2$ とすると，$f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致する．

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき $e^x>0$ であるから　　$g(x)=x-2e^x-2<x-2<0$

よって $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において $f'(x)<0$ であるから，$f(x)$ は単調に減少する．　■

$\boxed{\text{別解}}$

$g(x)=x-2e^x-2$ とすると　　$g'(x)=1-2e^x<0$

よって $g'(x)$ は単調に減少であり　　$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-2e^{\frac{1}{2}}-2=-2\sqrt{e}-\dfrac{3}{2}<0$

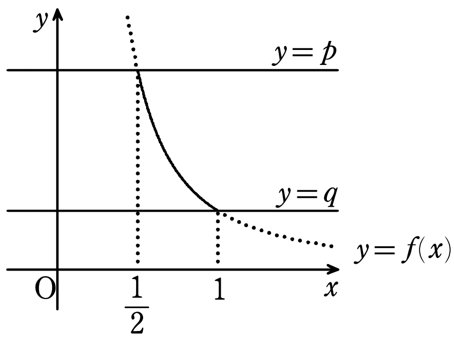
したがって　　$g(x)<0$　■

(3)　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ より $x^2>0$ であるから，不等式を変形すると

$$-px^2\leqq\frac{1}{1+e^x}-1\leqq -qx^2$$

$$-px^2\leqq\frac{-e^x}{1+e^x}\leqq -qx^2$$

$$p\geqq\frac{e^x}{x^2(1+e^x)}\geqq q \qquad \therefore\ p\geqq f(x)\geqq q$$



よって $|p-q|=p-q$ が最小 となるのは，

p が $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値，q が $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値

となるときである．(2) より $f(x)$ は単調に減少するから，$|p-q|$ が最小となる p，q は

$$p=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}},\qquad q=f(1)=\frac{e}{1+e}$$

［ｖ］

$f(-x)=\dfrac{-x}{1+(-x)^2}=-\dfrac{x}{1+x^2}=-f(x)$ より， $y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称であるから， $x\geqq 0$ の部分について考える．

(1)　$f'(x)=\dfrac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

$x\geqq 0$ のとき $(1+x^2)^2>0$，$1+x>0$ であるから，
$f(x)$ の増減は右のようになる．

x	0		1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(1)=\dfrac{1}{2}$ であるから， $y=f(x)$ の対称性に注意すると，

$x=1$ のとき極大値 $\dfrac{1}{2}$ をとり， $x=-1$ のとき極小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる．

(2)　$f''(x)=\dfrac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=\dfrac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$

$x>0$ のとき $(1+x^2)^3>0$，$x+\sqrt{3}>0$ であるから，
曲線 $y=f(x)$ の凹凸は右のようになる．

x	0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	$\cap$		$\cup$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ より $x>0$ における $y=f(x)$ の変曲点の座標は $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ である．

$f'(\sqrt{3})=-\dfrac{1}{8}$ であるから，変曲点における接線 ℓ の方程式は

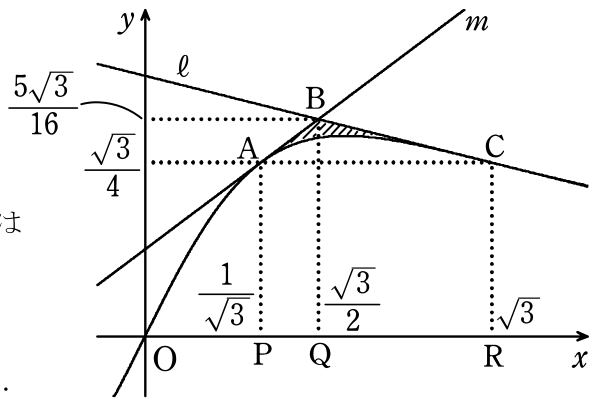
$$y=-\frac{1}{8}(x-\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}}{4}\qquad\therefore\ y=-\frac{1}{8}x+\frac{3\sqrt{3}}{8}\quad\cdots\cdots①$$

(3)　$f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{3}{8}$ であるから，直線 m の方程式は

$$y=\frac{3}{8}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{8}x+\frac{\sqrt{3}}{8}\quad\cdots\cdots②$$

①，② を連立させると　　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

① に代入すると $y=\dfrac{5\sqrt{3}}{16}$ であるから，2 直線 ℓ， m は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{16}\right)$ で交わる．



これと (1)，(2) より，求める面積は図の斜線部分である．
図のように点 A，B，C，P，Q，R をとると

$$(\text{台形APQB})+(\text{台形BQRC})-\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{16}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left[\frac{1}{2}\log|x^2+1|\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{9}{16}-\frac{1}{2}\log 3$$