解答速報　数学

医学部受験専門予備校　慧修会

2020年度　日本医科大学　前期

【　講　評　】

大問は例年通り４題で形式に変化はなかった．昨年と比較して手をつけやすい問題が多かったが，計算量が増加したため，難易度的には同程度である．全体で６割程度の得点をしたい．以下，大問ごとに述べる．

［Ⅰ］定積分で表された関数の最小値を求める定石問題．偶奇関数の性質を用いることと，必要な項のみを抜き出して計算量を最小限にする工夫がポイントとなる．今回の試験では確実に得点したい問題である．

［Ⅱ］問２までは前半は空間座標（ベクトル）の典型処理なので確実に得点したい．問３の非回転体の体積は日本医科大ではあまり出題されていないため，対策がおろそかであった人も多いだろう．国立大や慈恵医科大の対策をしっかりと行っていた生徒にとっては簡単な問題である．

［Ⅲ］軌跡（媒介変数表示）の典型問題であり，計算量もそれほど多くはない．今回の試験では確実に得点したい問題である．

［Ⅳ］確率漸化式の典型問題であるが，係数に文字が含まれるため，計算が非常に面倒である．試験時間内に解ききれた人は少ないであろう．問３や問４は答えだけを書けば良いので，n に具体的な値を代入するなどして答えを見つけてしまうのも良いだろう．

【　解　答　】

［Ⅰ］積分法（数Ⅲ）【標準】

$a=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$，　$b=-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

$\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}$，　$\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}$，　$\displaystyle\int_0^1 x^2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}-\frac{16}{\pi^3}$

$p=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}-\dfrac{20\sqrt{3}}{3\pi^2}$，　$q=1$

［Ⅱ］ベクトル（数B）／積分法（数Ⅲ）【標準】

問１　$2x-\sqrt{5}y+\sqrt{3}z=0$

問２　$\dfrac{\pi}{3}$

問３　12π

［Ⅲ］図形と方程式（数Ⅱ）／積分法（数Ⅲ）【標準】

問 1　中心 $\left(\dfrac{k}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{k}{2}$

問 2　$l_1(t)$：$4tx-(4-t^2)y-t=0$，$l_2(t)$：$2tx-(1-t^2)y-t=0$

問 3　$\mathrm{P}(t)\left(\dfrac{3}{2(t^2+2)},\ \dfrac{t}{t^2+2}\right)$

問 4　楕円 $\dfrac{64}{9}\left(x-\dfrac{3}{8}\right)^2+8y^2=1$ の一部

焦点：$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，　長軸の長さ：$\dfrac{3}{4}$，　短軸の長さ：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

［Ⅳ］数列（数 B）／微分法（数Ⅲ）【やや難】

問 1　$p_1=\dfrac{8}{27}$，$q_1=\dfrac{4}{9}$

問 2　$p_{n+1}=\dfrac{8}{27}p_n+\dfrac{4x}{9}q_n$，$q_{n+1}=\dfrac{4}{9}p_n+\dfrac{4}{9}q_n$

問 3　$(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{10-2\sqrt{36x+1}}{27},\ \dfrac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}\right)$

問 4　$F(x)=\dfrac{1+\sqrt{36x+1}}{2\sqrt{36x+1}}$，$G(x)=\dfrac{-1+\sqrt{36x+1}}{2\sqrt{36x+1}}$，

$H(x)=-\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}$，$I(x)=\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}$

問 5　$\dfrac{4-\sqrt{5}}{3}<x<1$

【　解　説　】

［Ⅰ］

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_0^1 (3ax^2+b)dx=2\Big[ax^3+bx\Big]_0^1=2(a+b)$$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$ より　$2(a+b)=0$　　$\therefore\ b=-a$　……①

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=2\int_0^1\{9a^2x^4+(6ab+4)x^2+b^2\}dx$$

$$=2\left[\frac{9}{5}a^2x^5+\frac{2}{3}(3ab+2)x^3+b^2x\right]_0^1=2\left\{\frac{9}{5}a^2+\frac{2}{3}(3ab+2)+b^2\right\}$$

$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=6$ より　$2\left\{\frac{9}{5}a^2+\frac{2}{3}(3ab+2)+b^2\right\}=6$　　$\therefore\ \frac{9}{5}a^2+\frac{2}{3}(3ab+2)+b^2=3$　……②

① を ② に代入すると　$\frac{9}{5}a^2+\frac{2}{3}(-3a^2+2)+a^2=3$　　$\therefore\ a^2=\frac{25}{12}$

$a>0$ であることと ① より　$a=\sqrt{\frac{25}{12}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$，$b=-\frac{5\sqrt{3}}{6}$

次に

$$\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\{1+\cos(\pi x)\}dx=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[\frac{2}{\pi}x^2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{8}{\pi^2}x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{16}{\pi^3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1=\frac{2}{\pi}-\frac{16}{\pi^3}$$

また　$\left\{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(pf(x)+q)\right\}^2$

$$=\frac{\pi^2}{4}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\pi(pf(x)+q)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+(pf(x)+q)^2$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\pi pf(x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\pi q\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+p^2\{f(x)\}^2+2pqf(x)+q^2$$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$，$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=6$，，$\int_{-1}^{1}x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=0$ であることに注意すると，

p を含む項について　$p^2\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx-\pi p\int_{-1}^{1}f(x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$

$$=6p^2-2\pi p\int_0^1(3ax^2+b)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=6\left\{p-\frac{\pi}{6}\int_0^1(3ax^2+b)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right\}-\frac{\pi^2}{6}\left\{\int_0^1(3ax^2+b)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right\}^2$$

また q を含む項について　$\int_{-1}^{1}\left\{q^2-\pi q\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}dx=2q^2-2\pi q\cdot\frac{2}{\pi}=2q^2-4q=2(q-1)^2-2$

p，q はすべての実数をとるから　$p=\frac{\pi}{6}\int_0^1(3ax^2+b)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$　かつ　$q=2$

のとき最小となる．よって　$p=\frac{\pi}{6}\int_0^1(3ax^2+b)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{5}{9}\sqrt{3}-\frac{20\sqrt{3}}{3\pi^2}$

［Ⅱ］

問１　$\mathrm{A}\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，平面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=-2(x-1)+\sqrt{5}\left(y+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(z-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$\therefore\ 2x-\sqrt{5}\,y-\sqrt{3}\,z=0$

問２　$\vec{a}=(0,\ 0,\ 1)$ とすると　$|\vec{a}|=1$

また $|\vec{n}|=\sqrt{4+5+3}=2\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}$

$\vec{a}$ と $\vec{n}$ のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{1\cdot2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

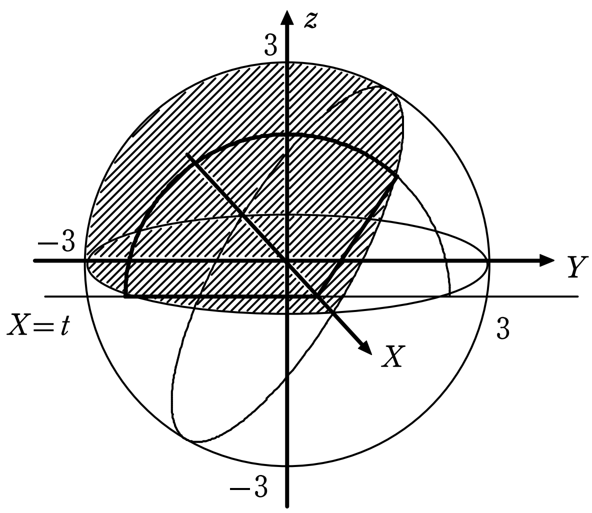
問３　$2x-\sqrt{5}\,y-\sqrt{3}\,z=0$ において $z=0$ とすると　$2x-\sqrt{5}\,y=0$　……①

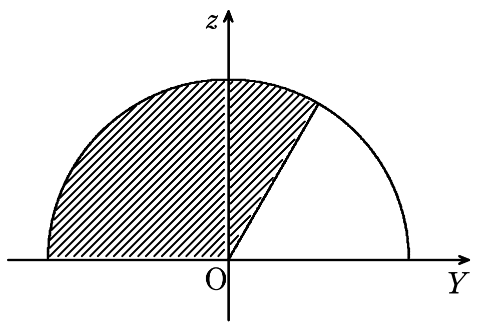
よって平面 α は直線 ① を含み，xy 平面とのなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ である.

また $z\geqq0$，$x^2+y^2+z^2\leqq9$ は原点を中心とする半径 3 の球の $z\geqq0$ の部分を表す.

直線 ① を X 軸とし，xy 平面上で原点を通り ① に直交する直線を Y 軸とすると，

立体は Y 軸に関して対称である.





$X=t\ (0\leqq t\leqq3)$ における断面は，半径 $\sqrt{9-t^2}$，中心角 $\dfrac{2}{3}\pi$ の扇形となるから，

その面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{9-t^2})\cdot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{3}(9-t^2)$

したがって求める体積を V とすると

$$\frac{V}{2}=\int_0^3\frac{\pi}{3}(9-t^2)dt=\frac{\pi}{3}\left[9t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3=6\pi\qquad\therefore\ V=12\pi$$

参考　xy 平面，平面 α ともに球の中心を通り，平面 α は xy 平面とのなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ であることから，

立体の体積は球の体積 $\dfrac{4}{3}\pi\cdot3^3=36\pi$ の $\dfrac{1}{3}$ となる.

［Ⅲ］

問１　$\mathrm{T}_t(k)(X,\ Y)$ とおくと　$X=\dfrac{k}{1+t^2k^2}$，　$Y=\dfrac{tk^2}{1+t^2k^2}$

$t>0$，　$k>0$ より　$X>0$，$Y>0$

このとき　$Y=\dfrac{k}{1+t^2k^2}\cdot tk=tkX$　　$\therefore\ tk=\dfrac{Y}{X}$

よって　$X=\dfrac{k}{1+\left(\dfrac{Y}{X}\right)^2}=\dfrac{kX^2}{X^2+Y^2}$

$X\fallingdotseq 0$ であるから　$X^2+Y^2=kX$　　$\therefore\ \left(X-\dfrac{k}{2}\right)^2+Y^2=\dfrac{k^2}{4}$

よって $C(k)$ は，中心 $\left(\boldsymbol{\dfrac{k}{2}},\ \boldsymbol{0}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{k}{2}}$ の円の一部を表す.

問２　$\mathrm{T}_t\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{2}{t^2+4},\ \dfrac{t}{t^2+4}\right)$，　$\mathrm{T}_t(1)=\left(\dfrac{1}{t^2+1},\ \dfrac{t}{t^2+1}\right)$ である.

また，$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，　$\mathrm{C}(1)$ の中心 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ とする.

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}_t\left(\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{2}{t^2+4}-\frac{1}{4},\ \frac{t}{t^2+4}\right)=\frac{1}{4(t^2+4)}(4-t^2,\ 4t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BT}_t(1)}=\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2},\ \frac{t}{t^2+1}\right)=\frac{1}{2(t^2+1)}(1-t^2,\ 2t)$$

$l_1(t)$ は A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AT}_t\left(\frac{1}{2}\right)}$ に平行な直線であるから，その方程式は

$$4t\left(x-\frac{1}{4}\right)x-(4-t^2)=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{4tx-(4-t^2)y-t=0} \quad \cdots\cdots①$$

$l_2(t)$ は B を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BT}_t(1)}$ に平行な直線であるから，その方程式は

$$2t\left(x-\frac{1}{2}\right)-(1-t^2)y=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{2tx-(1-t^2)y-t=0} \quad \cdots\cdots②$$

問３　②×2−① より　$\{(4-t^2)-2(1-t^2)\}y-t=0$　　$\therefore\ y=\dfrac{t}{t^2+2}$

これを ② に代入すると　$2tx=(1-t^2)\cdot\dfrac{t}{t^2+2}+t=\dfrac{3t}{t^2+2}$　　$\therefore\ x=\dfrac{3}{2(t^2+2)}$

よって　$\mathrm{P}(t)\left(\dfrac{3}{2(t^2+2)},\ \dfrac{t}{t^2+2}\right)$

問 4　P(t) $(X',\ Y')$ とすると　$X'=\dfrac{3}{2(t^2+2)}$，$Y'=\dfrac{t}{t^2+2}$

$t>0$ であるから　$X'>0$，$Y'>0$

このとき　$Y'=\dfrac{1}{2(t^2+2)}\cdot\dfrac{2}{3}t=\dfrac{2}{3}X't$　$\therefore\ t=\dfrac{3Y'}{2X'}$

よって　$X'=\dfrac{3}{2\left(\dfrac{9Y'}{4X'^2}+2\right)}=\dfrac{6X'^2}{9Y'^2+8X'^2}$　$\therefore\ 8X'^2+9Y'^2=6X'$

これを変形すると　$8\left(X'-\dfrac{3}{8}\right)^2+9Y'^2=\dfrac{9}{8}$　$\therefore\ \dfrac{64}{9}\left(X'-\dfrac{3}{8}\right)^2+8Y'^2=1$

よって P(t) が描く曲線は，楕円 $\dfrac{64}{9}\left(x-\dfrac{3}{8}\right)^2+8y^2=1$ の一部である．

これは楕円 $\dfrac{64}{9}x^2+8y^2=1$ を x 軸方向に $\dfrac{3}{8}$ だけ平行移動したものであることに注意

すると，$\sqrt{\dfrac{9}{64}-\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{8}$ より焦点の座標は

$\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8},\ 0\right)$，つまり $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$

また長軸の長さは $2\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{4}$，短軸の長さは $2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．

［Ⅳ］

問 1　p_1 は $w(0)=3$ から $w(1)=3$ となるときの確率であるから　$p_1=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{8}{27}}$

q_1 は $w(0)=3$ から $w(1)=2$ となるときの確率であるから，どれが黒球になるかに注意して

$$q_1={}_3\mathrm{C}_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{4}{9}}$$

問 2　$w(n)=3$ から $w(n+1)=3$ となる確率は　$\frac{8}{27}$

$w(n)=2$ から $w(n+1)=3$ となるのは，2 個の白球は白球のままで，1 個の黒球が白球になるときであるから，その確率は　$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot x=\frac{4x}{9}$

よって　$\mathbf{p_{n+1}=\frac{8}{27}p_n+\frac{4x}{9}q_n}$　……①

$w(n)=3$ から $w(n+1)=2$ となるのは，3 個の白球のうち 1 個が黒球になるときであるから，その確率は　${}_3\mathrm{C}_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$

$w(n)=2$ から $w(n+1)=2$ となるのは，

（ⅰ）2 個の白球が白球のままで，1 個の黒球も黒球のままである

（ⅱ）2 個の白球のうち 1 つが黒球になり，1 個の黒球が白球になる

ときがあることに注意すると，その確率は　$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(1-x)+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cdot x=\frac{4}{9}$

よって　$\mathbf{q_{n+1}=\frac{4}{9}p_n+\frac{4}{9}q_n}$　……②

問 3　② より　$p_n=\frac{9}{4}q_{n+1}-q_n$

① に代入すると　$\frac{9}{4}q_{n+2}-q_{n+1}=\frac{8}{27}\left(\frac{9}{4}q_{n+1}-q_n\right)+\frac{4x}{9}q_n$

$$q_{n+2}-\frac{20}{27}q_n+\left(\frac{32}{243}-\frac{16}{81}x\right)q_n=0$$

① より　$q_n=\frac{9}{4x}p_{n+1}-\frac{2}{3x}p_n$

② に代入すると　$p_{n+2}-\frac{20}{27}p_n+\left(\frac{32}{243}-\frac{16}{81}x\right)p_n=0$

与えられた連立漸化式が成り立つとき　$\alpha+\beta=\frac{20}{27}$，$\alpha\beta=\frac{32}{243}-\frac{16}{81}x$

解と係数の関係により α，β は t の 2 次方程式　$t^2-\frac{20}{27}t+\left(\frac{32}{243}-\frac{16}{81}x\right)=0$

の 2 解であるから，これを解くと

$$t=\frac{10}{27}\pm\sqrt{\left(\frac{10}{27}\right)^2-\left(\frac{32}{243}-\frac{16}{81}x\right)}=\frac{10\pm2\sqrt{36x+1}}{27}$$

$\alpha<\beta$ であるから　$(\alpha,\ \beta)=\left(\mathbf{\frac{10-2\sqrt{36x+1}}{27}},\ \mathbf{\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}}\right)$

問 4　問 3 の漸化式を変形すると　$\begin{cases} p_{n+2}-\alpha p_{n+1}=\beta(p_{n+1}-\alpha p_n) \\ p_{n+2}-\beta p_{n+1}=\alpha(p_{n+1}-\beta p_n) \end{cases}$

数列 $\{p_{n+1}-\alpha p_n\}$，$\{p_{n+1}-\beta p_n\}$ は等比数列であるから　$\begin{cases} p_{n+1}-\alpha p_n=(p_1-\alpha p_0)\cdot\beta^n \\ p_{n+1}-\beta p_n=(p_1-\beta p_0)\cdot\alpha^n \end{cases}$

2 式の差をとると　$(\beta-\alpha)p_n=(p_1-\alpha p_0)\cdot\beta^n-(p_1-\beta p_0)\cdot\alpha^n$

ここで　$\beta-\alpha=\dfrac{4}{27}\sqrt{36x+1}$

また $p_1=\dfrac{8}{27}$，$p_0=1$ より

$$p_1-\alpha p_0=\frac{8}{27}-\frac{10-2\sqrt{36x+1}}{27}=\frac{-2+2\sqrt{36x+1}}{27}$$

$$p_1-\beta p_0=\frac{8}{27}-\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}=\frac{-2-2\sqrt{36x+1}}{27}$$

であるから

$$\frac{4}{27}\sqrt{36x+1}\,p_n=\frac{2}{27}(-1+\sqrt{36x+1})\beta^n+\frac{2}{27}(1+\sqrt{36x+1})\alpha^n$$

$$\therefore\ p_n=\frac{1+\sqrt{36x+1}}{2\sqrt{36x+1}}\alpha^n+\frac{-1+\sqrt{36x+1}}{2\sqrt{36x+1}}\beta^n$$

よって　$F(x)=\dfrac{1+\sqrt{36x+1}}{2\sqrt{36x+1}}$，$G(x)=\dfrac{-1+\sqrt{36x+1}}{2\sqrt{36x+1}}$

数列 $\{q_n\}$ の漸化式についても同様に

$$(\beta-\alpha)q_n=(q_1-\alpha q_0)\cdot\beta^n-(q_1-\beta q_0)\cdot\alpha^n$$

となり，$q_1=\dfrac{4}{9}$，$q_0=0$ より　$q_1-\alpha q_0=q_1-\beta q_0=\dfrac{4}{9}$，

であるから　$\dfrac{4}{27}\sqrt{36x+1}\,q_n=\dfrac{4}{9}\beta^n-\dfrac{4}{9}\alpha^n$　$\therefore\ q_n=-\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}\alpha^n+\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}\beta^n$

よって　$H(x)=-\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}$，$I(x)=\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}$

問 5　$w(n)=3$ から $w(n+1)=1$ となるのは，3 個の白球のうち 2 個が黒球に

なるときであるから，その確率は　${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$

$w(n)=2$ から $w(n+1)=1$ となるのは，

(iii)　2 個の白球のうち 1 個が黒球になり，1 個の黒球が黒球のままである

(iv)　2 個の白球が共に黒球になり，1 個の黒球が白球になる

ときがあることに注意すると，その確率は

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\cdot(1-x)+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot x=\frac{4-3x}{9}$$

$w(n)=1$ から $w(n+1)=1$ となるのは，1 個の白球が白球のままであり，

2 個の黒球も黒球のままとなるときであるから，その確率は　$\dfrac{1}{3}\cdot 1^2=\dfrac{1}{3}$

よって　$r_{n+1}=\dfrac{2}{9}p_n+\dfrac{4-3x}{9}q_n+\dfrac{1}{3}r_n$

問 4 より　$r_{n+1}=\dfrac{2}{9}\{F(x)\alpha^n+G(x)\beta^n\}+\dfrac{4-3x}{9}\{H(x)\alpha^n+I(x)\beta^n\}+\dfrac{1}{3}r_n$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+\left\{\frac{2}{9}F(x)+\frac{4-3x}{9}H(x)\right\}\alpha^n+\left\{\frac{2}{9}G(x)+\frac{4-3x}{9}I(x)\right\}\beta^n \quad \cdots\cdots③$$

この漸化式を　$r_{n+1}+A\alpha^{n+1}+B\beta^{n+1}=\dfrac{1}{3}(r_n+A\alpha^n+B\beta^n)$　……④

と変形することを考える．

④ より　$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n+\left(\dfrac{1}{3}A-A\alpha\right)\alpha^n+\left(\dfrac{1}{3}B-B\beta\right)\beta^n$

これと ③ を比較すると

$$\frac{1}{3}A(1-3\alpha)=\frac{2}{9}F(x)+\frac{4-3x}{9}H(x) \qquad \therefore\ A=\frac{1}{1-3\alpha}\left\{\frac{2}{3}F(x)+\frac{4-3x}{3}H(x)\right\}$$

$$\frac{1}{3}B(1-3\beta)=\frac{2}{9}G(x)+\frac{4-3x}{9}I(x) \qquad \therefore\ B=\frac{1}{1-3\beta}\left\{\frac{2}{3}G(x)+\frac{4-3x}{3}I(x)\right\}$$

このとき数列 $\{r_n\}$ は等比数列であるから，　$r_0=0$ より

$$r_n+A\alpha^n+B\beta^n=(r_0+A\alpha^0+B\beta^0)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=(A+B)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore\ r_n=(A+B)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-A\alpha^n-B\beta^n$$

よって　$\dfrac{r_n}{q_n}=\dfrac{(A+B)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-A\alpha^n-B\beta^n}{H(x)\alpha^n+I(x)\beta^n}=\dfrac{(A+B)\left(\dfrac{1}{3\beta}\right)^n-A\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n-B}{H(x)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+I(x)}$

$0<x<1$ のとき　$|\beta|^2-|\alpha|^2=\dfrac{80\sqrt{36x+1}}{(27)^2}>0$　　$\therefore\ \left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$

また　$3\beta=\dfrac{10+2\sqrt{36x+1}}{9}>\dfrac{4}{3}$ より　$0<\dfrac{1}{3\beta}<1$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}=-\frac{B}{I(x)}$　となり収束する．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}<1$ となるとき　$-\dfrac{B}{I(x)}<1$　　$\therefore\ -B<I(x)$　$(\because\ I(x)>0)$

$$\frac{1}{3\beta-1}\left\{\frac{2}{3}G(x)+\frac{4-3x}{3}I(x)\right\}<I(x)$$

$$2G(x)<(9\beta+3x-7)I(x)$$

$$2\cdot\frac{-1+\sqrt{36x+1}}{2\sqrt{36x+1}}<\left(9\cdot\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}+3x-7\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{36x+1}}$$

$$\sqrt{36x+1}>10-9x$$

$0<x<1$ より両辺正であるから 2 乗すると

$$36x+1>100-180x+81x^2 \qquad \therefore\ 9x^2-24x+11<0$$

$9x^2-24x+11=0$ のとき　$x=\dfrac{4\pm\sqrt{5}}{3}$

よって　$\dfrac{4-\sqrt{5}}{3}<x<\dfrac{4+\sqrt{5}}{3}$

$0<x<1$ であるから　$\dfrac{4-\sqrt{5}}{3}<x<1$