解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2020年度　昭和大学　Ⅰ期

【　講　評　】

大問は例年通り４題で形式に変化はなかった．難易度は去年度に比べやや易しく，計算量もやや少なくなったため，平年並みの試験であった．全体的に７割程度の得点をしたい．

【　解　答　】

$\boxed{1}$　複素数平面（数Ⅲ）・図形と方程式（数Ⅱ）：標準

(1)　なす角 $\dfrac{\pi}{3}$ ，面積 $2\sqrt{3}$

(2)　$\beta'=\sqrt{3}-i$，$\gamma'=2\sqrt{3}+2i$，$\mu'=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{3}+i)$

(3)　$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

(4)　$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\pm\sqrt{7}$

$\boxed{2}$　漸化式（数B）・数列の極限（数Ⅲ）：標準

(1)　廃問

(2)　$a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(3)　$a_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n\right\}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\boxed{3}$　（1）２次曲線（数Ⅲ）：易／（2）確率（数A）：標準

(1)　(1−1)　$(0,\ \pm\sqrt{5})$，　(1−2)　$y=\pm\dfrac{4}{3}x$

(2)　(2−1)　$\dfrac{25}{56}$，　(2−2)　$\dfrac{5}{28}$，　(2−3)　$\dfrac{47}{252}$

$\boxed{4}$　（1）微分法（数Ⅲ）：易／（2）積分法（数Ⅱ）：易／（3）積分法（数Ⅲ）：標準

(1)　$y'=\dfrac{5}{(5x-7)\log 3}$

(2)　181654

(3)　13π

【 解 説 】

$\boxed{1}$

(1) B(β)，C(γ) であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角は $\arg\left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)$ となる.

$\beta=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i\}$，

$\gamma=\sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i=\sqrt{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\}$ であるから

$$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i\}}=1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ である.

また $\left|\dfrac{\gamma}{\beta}\right|=2$，$|\beta|=2$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$， $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=4$ であるから，△OBC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

別解 図形と方程式で扱う公式を用いても良い.

直線 OB の傾き $\dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=2-\sqrt{3}$，直線 OC の傾き $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$ である.

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を φ とすると， 2 直線 OB，OC のなす角に等しいから

$$\tan\varphi=\left|\frac{(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})}{1+(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\right|=\sqrt{3}$$

$0<\varphi<\pi$ であるから $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{6}-\sqrt{2},\ \sqrt{6}+\sqrt{2})$ より，

△OBC の面積は $\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right|=2\sqrt{3}$

(2)　$\alpha=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ とおくと，B$'(\beta')$，C$'(\gamma')$ は B(β)，C(γ) を

原点の周りに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点であるから

$$\beta'=\beta\alpha=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i\}(1-i)=\sqrt{3}-i$$

$$\gamma'=\gamma\alpha=\frac{2}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\}(1-i)=2\sqrt{3}+2i$$

また，M は BC の中点であるから，M$'$ は B$'$C$'$ の中点である．

よって　$\mu'=\dfrac{1}{2}(\beta'+\gamma')=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{3}+i)$

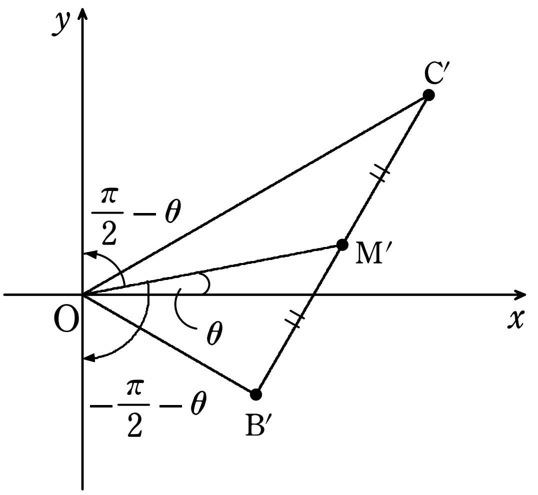
(3)　$|\mu'|=\sqrt{7}$ であるから $\mu'=\sqrt{7}(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表せる．

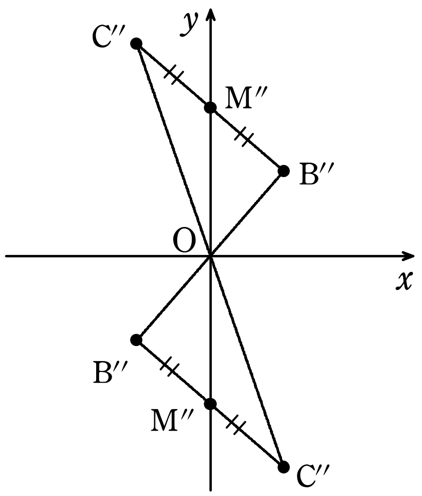
$\mu'=\sqrt{7}\left(\dfrac{3\sqrt{21}}{14}+\dfrac{\sqrt{7}}{14}i\right)$ であるから　$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

(4)　△OB$'$C$'$ は △OBC を回転させたものであるから，これらの面積は等しい．

また，△OB$'$C$'$ の面積は OM$'$ で二等分される．よって下の図のように OM$'$ を $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ または

$-\dfrac{\pi}{2}-\theta$ 回転させて y 軸上に乗るように △OB$'$C$'$ を回転させると △OB$''$C$''$ が得られる．





B$''$C$''$ の中点を M$''$ とすると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}''}\right|=|\mu'|=\sqrt{7}$ より M$''(0,\ \pm\sqrt{7})$ である．

直線 B$'$C$'$ の傾きは $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ であるから，直線 B$'$C$'$ が x 軸正の方向とのなす角は

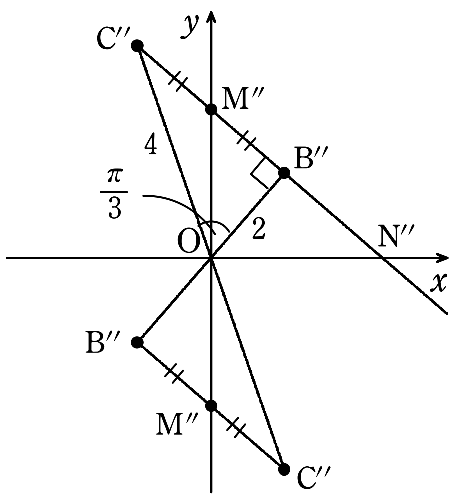
$\dfrac{\pi}{3}$ である．また $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ より $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ である．

よって直線 B$''$C$''$ の傾きは，

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)=\frac{\tan\frac{5}{6}\pi-\tan\theta}{1+\tan\frac{5}{6}\pi\tan\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

直線 B$''$C$''$ の方程式は M$''$ を通ることに注意すると　$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\pm\sqrt{7}$

別解　傾きを図形的に求めると容易に解くことができる.
△OBC を O を中心に回転させてできる △OB″C″ は，下の図の 2 通りであり，これらは原点 O に関して対称であるから，どちらの場合でも直線 B″C″ の傾きは等しい.
B″，C″ が $y>0$ の部分にある場合の直線 B″C″ の傾きについて考える.



直線 B″C″ の傾きは，x 軸と直線 B″C″ との交点を N″ とすると，
$-\tan\angle \mathrm{ON''B''}$ と表せる.

$\angle \mathrm{OB''M''}=\angle \mathrm{OB''C''}=\angle \mathrm{OBC}=\dfrac{\pi}{2}$ であり，$\angle \mathrm{M''ON''}=\dfrac{\pi}{2}$ より

△OB″M″∽△N″B″O が成り立つから，直線 B″C″ の傾きについて

$$-\tan\angle \mathrm{ON''B''}=-\tan\angle \mathrm{M''OB''}$$

が成り立つ.

ここで $\angle \mathrm{OB''M''}=\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{OB''}=2$，$\mathrm{M''B''}=\dfrac{1}{2}\mathrm{C''B''}=\sqrt{3}$ であるから

$$-\tan\angle \mathrm{ON''B''}=-\tan\angle \mathrm{M''OB''}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OM'}}|=|\mu'|=\sqrt{7}$ より $\mathrm{M''}(0,\ \pm\sqrt{7})$ であるから，直線 B″C″ の方程式は

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x\pm\sqrt{7}$$

$\boxed{2}$

(1)　廃問扱いのため省略.

(2)　両辺に $(2n-1)$ をかけて　　$(2n+1)(2n-1)a_n=(2n-1)(2n-3)a_{n-1}$

数列 $\{(2n+1)(2n-1)a_{n-1}\}$ は定数列であるから

$$(2n+1)(2n-1)a_n=3\cdot 1\cdot a_1=1 \qquad \therefore\ a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=0$　答

(3)　$x^2=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{8}$ より　　$8x^2-4x-1=0$　　$\therefore\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{12}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{4}$

これらを α, $\beta\,(\alpha<\beta)$ とおくと $\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$ より　$\alpha=\dfrac{1}{2}-\beta$, $\beta=\dfrac{1}{2}-\alpha$

このとき漸化式は以下の形に変形できる.

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \quad \cdots\cdots①$$

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \quad \cdots\cdots②$$

① より $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は等比数列であるから

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\cdot\beta^{n-1}=\beta^n \quad \cdots\cdots③$$

② より $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は等比数列であるから

$$a_{n+1}-\beta a_n=(a_1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}=\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\cdot\alpha^{n-1}=\alpha^n \quad \cdots\cdots④$$

⑤−⑥ より　　$(\beta-\alpha)a_n=\beta^n-\alpha^n$

$\beta-\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　　$a_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n\right\}$

また $\left|\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right|<\left|\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right|$ より

$$a_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n\left\{1-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n\right\}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n\{1-(2-\sqrt{3})^n\}$$

$\left|\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right|<1$, $|2-\sqrt{3}|<1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

参考

数列 $\{a_n\}$ について $a_n>0$ かつ減少数列であることから収束するので,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\alpha$$

とすれば漸化式より　　$\alpha=\dfrac{1}{8}\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha$　　$\therefore\ \alpha=0$　となり, 収束値がわかる.

$\boxed{3}$

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=-1$ であるから

(1−1) $\sqrt{3^2+4^2}=5$ より，焦点の座標は　$(\mathbf{0},\ \pm\mathbf{5})$

(1−2) 漸近線の方程式は　　$\boldsymbol{y=\pm\dfrac{4}{3}x}$

(2) 各操作で取り出す球を $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{B}_2)$ と表す.

(2−1) $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{B}_1)=$(赤，赤)，(赤，白) のときであるから　$\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{4}{8}+\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{8}=\mathbf{\dfrac{25}{56}}$

(2−2) $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{B}_2)=$(赤，赤，赤，赤)，(赤，赤，白，赤)，
(白，赤，赤，赤)，(白，赤，白，赤)

のときであるから　$\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{4}{8}+\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{8}=\mathbf{\dfrac{5}{28}}$

(2−3) $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{B}_1)=$(赤赤，赤赤)，(白白，赤赤)，(赤白，赤赤)

のときであるから　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\cdot\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\cdot\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}\cdot\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\mathbf{\dfrac{47}{252}}$

別解　以下のように場合分けすると，操作を 1 つ省略することができる.

(2−2) (ⅰ) B_2 の赤が A_2 で取り出した赤と異なるとき

A_2 は赤，白のいずれでもよいから　$\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{8}$

(ⅱ) B_2 の赤が A_2 で取り出した赤と同じであるとき　$\left(\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{4}{6}\right)\times\dfrac{1}{8}$

(ⅰ)，(ⅱ) の和をとると　$\mathbf{\dfrac{5}{28}}$

(2−3) 各袋からの取り出し方を $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$ と表す .

(ⅰ) $(b_1,\ b_2)$ の赤がいずれも $(a_1,\ a_2)$ の赤と異なるとき

$(a_1,\ a_2)$ は何を取り出してもよいから　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$

(ⅱ) $(b_1,\ b_2)$ の赤の一方が $(a_1,\ a_2)$ の一方と一致するとき

$(a_1,\ a_2)=$(赤，赤) のとき　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}$

$(a_1,\ a_2)=$(赤，白) のとき　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}\times\dfrac{3}{{}_9\mathrm{C}_2}$

(ⅲ) $(b_1,\ b_2)$ の赤が共に $(a_1,\ a_2)$ と一致するとき　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\times\dfrac{1}{{}_9\mathrm{C}_2}$

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ) の和をとると　$\mathbf{\dfrac{47}{252}}$

$\boxed{4}$

(1)　$y=\log_3(5x-7)=\dfrac{\log(5x-7)}{\log 3}$ であるから

$$y'=\frac{1}{\log 3}\cdot\frac{5}{5x-7}=\frac{5}{(5x-7)\log 3}$$

(2)　$$\int_{1928}^{2020} f(x)dx=\sum_{n=1929}^{2020}\int_{n-1}^{n} f(x)dx=\sum_{n=1929}^{2020} n=\frac{1}{2}(1929+2020)\times 92=181654$$

(3)　C_1 : $y=2\sqrt{1-\dfrac{x}{7}}$，C_2 : $\sqrt{\dfrac{x}{7}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{2}}=1$ とおく.

C_1 より $1-\dfrac{x}{7}\geqq 0$，C_2 より $\dfrac{x}{7}\geqq 0$ であるから　　$0\leqq x\leqq 7$

このとき C_1 は $y\geqq 0$ であり上に凸の曲線である.

また C_2 について　　$\sqrt[3]{\dfrac{y}{2}}=\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{7}}\right)$　　$\therefore$ $y=2\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{7}}\right)^3$

$$y'=-\frac{3}{\sqrt{7x}}\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^2<0,\quad y''=\frac{3(7-x)}{14x\sqrt{7x}}>0$$

であるから，下に凸の曲線である.

C_1，C_2 はいずれも

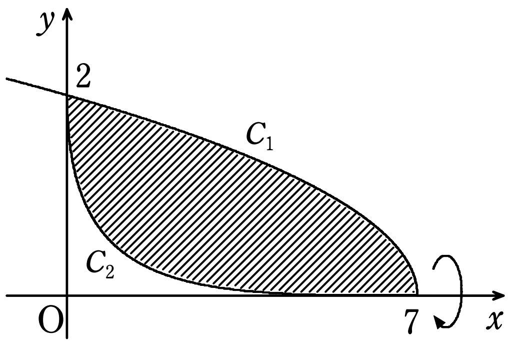
$x=0$ のとき $y=2$，

$x=7$ のとき $y=0$

である.

求める体積を V とすると，右図の斜線部分を

x 軸の周りに回転させたものであるから



$$V=\int_0^7\pi\left(2\sqrt{1-\frac{x}{7}}\right)^2dx-\int_0^7\pi\left\{2\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^3\right\}^2dx=4\pi\int_0^7\left(1-\frac{x}{7}\right)dx-4\pi\int_0^7\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6dx$$

このとき　$\displaystyle\int_0^7\left(1-\frac{x}{7}\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{14}\right]_0^7=7-\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$

また $I=\displaystyle\int_0^7\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6dx$ において $1-\sqrt{\dfrac{x}{7}}=t$ とおくと　$x=7(1-t)^2$

$\dfrac{dx}{dt}=14(1-t)$，

x	$0\longrightarrow 7$
t	$1\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle I=\int_1^0 t^6\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt=14\int_0^1 t^6(t-1)dt=14\int_0^1(t^7-t^6)dt=14\left[\frac{1}{8}t^8-\frac{1}{7}t^7\right]_0^1=\frac{1}{4}$

したがって　$V=4\pi\cdot\dfrac{7}{2}-4\pi\cdot\dfrac{1}{4}=13\pi$