解答速報　数学

2020年度　東海大学（2／2）

【　講　評　】

例年通り大問３題で出題され，第１問は小問集合であった．難易度も平年並みであるが，第３問の確率がやや複雑なため，第１問，第２問をなるべく早く正確に解き，第３問にどれだけ多くの時間を割くことができたかがポイントとなる．全体で７割程度の得点をしたい．

【　解　答　】

$\boxed{1}$　小問集合【標準】

(1)　ア：$-1+\sqrt{3} \leqq a < 1$,　(2)　イ：$\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}$,　(3)　ウ：$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

(4)　エ：$3(a+b)(b+c)(c+a)$,　(5)　オ：$n=890$,　(6)　カ：$16(2e^4-1)$

$\boxed{2}$　対数関数（数Ⅱ）／図形と方程式（数Ⅱ）／積分法（数Ⅱ）【標準】

(1)　ア：$\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$,　イ：$\dfrac{17}{12}$,　ウ：$-\dfrac{7}{4}$

(2)　(i)　エ：$1<a<\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$,　(ii)　オ：$1<b<3$

(iii)　カ：-2,　キ：3,　ク：$\dfrac{17}{24}$,　ケ：17,　コ：$\dfrac{13}{8}$

(iv)　サ：$1+\sqrt{3}<k<\dfrac{33}{8}$,　(v)　シ：$1+\sqrt{3}<k$

$\boxed{3}$　確率（数A）【標準】

(1)　(i)　ア：$\dfrac{1}{9}$,　(ii)　イ：$\dfrac{5}{9}$,　(2)　ウ：$\dfrac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$

(3)　エ：$\dfrac{(n+1)2^{n-2}}{3^n}$,　(4)　オ：$\dfrac{(n+1)2^{n-2}+1}{3^n}$

(5)　カ：$\dfrac{2}{3^{n-1}}$,　(6)　キ：$\dfrac{n+2}{3^n}$

【　解　説　】

$\boxed{1}$

(1)　$y=2$ のとき　　$2=-x^2+2ax+2a$　　$\therefore\ x^2-2ax+2-2a=0$

判別式を D_1 とすると，x が存在するとき

$$\frac{D_1}{4}=a^2+2a-2\geqq 0 \qquad \therefore\ a\leqq -1-\sqrt{3}\ ,\ a\geqq -1+\sqrt{3} \quad \cdots①$$

また $y=3$ のとき　　$3=-x^2+2ax+2a$　　$\therefore\ x^2-2ax+3-2a=0$

判別式を D_2 とすると，x が存在しないとき

$$\frac{D_2}{4}=a^2+2a-3<0 \qquad \therefore\ -3<a<1 \quad \cdots②$$

$a>0$ かつ ① かつ ② より　　$\boldsymbol{-1+\sqrt{3}\leqq a<1}$

別解　最大値に注目して解くこともできる

$y=-(x-a)^2+a^2+2a$

x がすべての実数をとるとき，y の値域は　　$y\leqq a^2+2a$

よって条件を満たすのは　$-2\leqq a^2+2a<3$

$-2\leqq a^2+2a$ より　　$a^2+2a-2\geqq 0$　　$\therefore\ a\leqq -1-\sqrt{3}\ ,\ a\geqq -1+\sqrt{3}$　$\cdots\cdots①$

また $a^2+2a<3$ より　　$a^2+2a-3<0$　　$\therefore\ -3<a<1$　$\cdots\cdots②$

$a>0$ かつ ① かつ ② より　　$\boldsymbol{-1+\sqrt{3}\leqq a<1}$

(2)　2 円の中心間距離は　$\sqrt{(\sqrt{t}-0)^2+(3-t)^2}=\sqrt{t^2-5t+9}$

2 円が外接するとき，中心間距離が半径の和と等しいから

$$\sqrt{t^2-5t+9}=1+3=4$$

両辺を 2 乗すると　$t^2-5t+9=16$　　$\therefore\ t^2-5t-7=0$

$\sqrt{t}$ より $t\geqq 0$ であるから　　$t=\boldsymbol{\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}}$

(3)

$$\begin{aligned}\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24}&=\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}\right)^2=\cos\frac{\pi}{12}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

別解　a^2-b^2 の形に注目して因数分解してもよい．

$$\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24}=\left(\cos^2\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)=1\cdot\cos\frac{\pi}{12}$$

以下，本解答に同じ．

(4)　$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=\{a+(b+c)\}^3-a^3-(b^3+c^3)$

$=a^3+3(b+c)a^2+3(b+c)^2a+(b+c)^3-a^3-(b^3+c^3)$

$=3(b+c)a^2+3(b+c)^2a+(3b^2c+3bc^2)$

$=3(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=3(b+c)\{(a+b)(a+c)\}$

$=\mathbf{3(a+b)(b+c)(c+a)}$

(5)　n^3+100 を $n+10$ で割ると

$$\frac{n^3+100}{n+10}=n^2-10n+100-\frac{900}{n+10}\quad\cdots\cdots①$$

n^3+100 が $n+10$ で割り切れるのは，上の式の右辺が自然数となるときであるから，$\dfrac{900}{n+10}$ が自然数となる必要がある．これを満たす最大の自然数 n は　　$\mathbf{n=890}$

このとき ① の右辺は　$890^2-10\cdot 890+100-1>0$　となるので自然数である．

(6)　$f(x)=\int_0^x x^4e^{2t}dt=x^4\int_0^x e^{2t}dt$ とすると

$f'(x)=4x^3\int_0^x e^{2t}dt+x^4e^{2x}=4x^3\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^x+x^4e^{2x}=x^3(xe^{2x}+2e^{2x}-2)$

よって　　$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\int_0^2 x^4e^{2t}dt-\int_0^2 16e^{2t}dt\right)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$=2^3(2e^{2\cdot 2}+2e^{2\cdot 2}-2)=\mathbf{16(2e^4-1)}$

$\boxed{2}$

(1)　$-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+3=1$ より　　$x^2-x-4=0$　……①　　$\therefore$ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

$\alpha>\beta$ より　　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

また α は ① の解であるから　　$\alpha^2-\alpha-4=0$

ここで　　$\displaystyle\int_1^\alpha\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+2x\right]_1^\alpha=-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{4}\alpha^2+2\alpha-\frac{25}{12}$

これを $\alpha^2-\alpha-4$ で割ると，商：$-\dfrac{1}{6}\alpha+\dfrac{1}{12}$，余り：$\dfrac{17}{12}\alpha-\dfrac{7}{4}$ であるから，

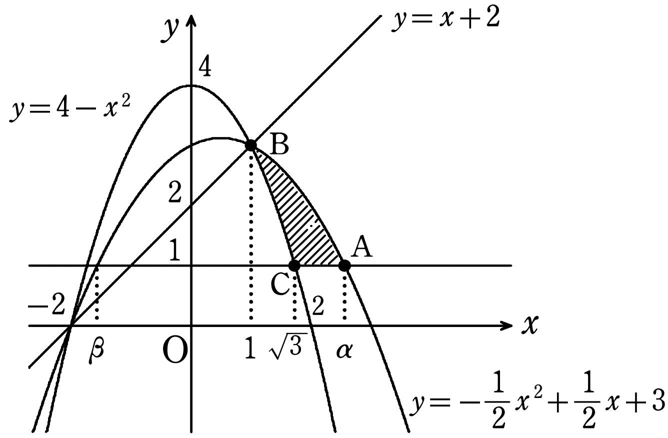
$$\int_1^\alpha\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left(-\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{12}\right)(\alpha^2-\alpha-4)+\frac{17}{12}\alpha-\frac{7}{4}=\boldsymbol{\frac{17}{12}\alpha-\frac{7}{4}}$$

(2)　対数の真数は正であるから　$\begin{cases}x^2+y-4>0\\x-y+2>0\end{cases}$　$\therefore$ $4-x^2<y<x+2$　…②

このとき $\begin{cases}\log_y(x^2+y-4)<\log_y(x-y+2)\\1<y\end{cases}$ より

$\begin{cases}x^2+y-4<x-y+2\\1<y\end{cases}$　　$\therefore$ $\begin{cases}y<-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+3\\1<y\end{cases}$　…③

②，③ の共通部分が領域 D であり，これを図示すると下の図の斜線部となる．
ただし，境界線は含まない．



(ⅰ)　図より　$1<a<\alpha$　　$\therefore$　$\boldsymbol{1<a<\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$

(ⅱ)　図より　$\boldsymbol{1<b<3}$

(ⅲ)　求める面積を S とすると　　$S=\displaystyle\int_1^\alpha\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3-1\right)dx-\int_1^{\sqrt{3}}(4-x^2-1)dx$

(1) の結果を利用すると

$$S=\frac{17}{12}\alpha-\frac{7}{4}-\left[3x-\frac{x^3}{3}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{17}{12}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{2}-\frac{7}{4}-\left(3\sqrt{3}-\sqrt{3}-3+\frac{1}{3}\right)$$

$$=-2\sqrt{3}+\frac{17}{24}\sqrt{17}-\frac{25}{24}+\frac{8}{3}=\boldsymbol{-2\sqrt{3}+\frac{17}{24}\sqrt{17}+\frac{13}{8}}$$

(iv) 領域 D と直線 $y=-x+k$ ……④ が共有点を持つ k の値の範囲が求めるものである．

$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$ について　　$y'=-x+\frac{1}{2}$

よって点 A における接線の傾きは $-\frac{1}{2}$，点 B における接線の傾きは $-\frac{\sqrt{17}}{2}$ である．

④ が $(\sqrt{3},\ 1)$ を通るとき　　$k=1+\sqrt{3}$

④と $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$ が接するとき

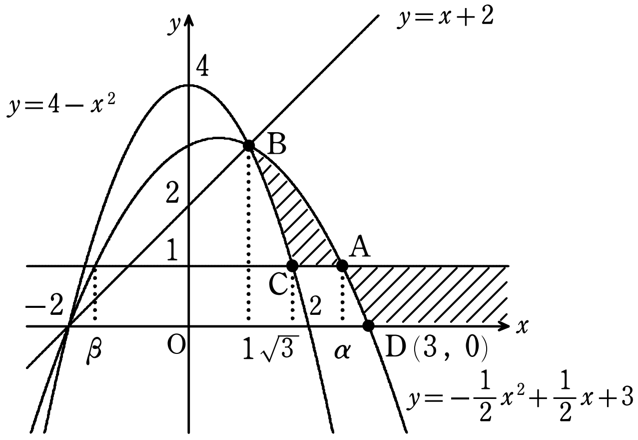
$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3=-x+k \qquad \therefore\ x^2-3x+2k-6=0$$

判別式を D_1 とすると　　$D_1=9-8k+24=0$　　$\therefore\ \ k=\frac{33}{8}$

以上より　　$1+\sqrt{3}<k<\frac{33}{8}$

(3) ② が成り立つとき $\begin{cases}\log_y(x^2+y-4)<\log_y(x-y+2)\\ 1<y\end{cases}$ より　$\begin{cases}y>-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3\\ 0<y<1\end{cases}$ ……④

領域 D' は，② かつ (③ または ④) の表す領域であるから，下図の斜線部となる．
ただし，境界線は含まない．



これと $x+y=k$ ……④ が共有点を持つ k の値の範囲が求めるものである．

④ が C$(\sqrt{3},\ 1)$ を通るとき　　$k=1+\sqrt{3}$

2 点 C，D を通る直線の傾きが $-\frac{1}{3-\sqrt{3}}=-\frac{3+\sqrt{3}}{6}>-1$ であることから，

求める k の値の範囲は　　$1+\sqrt{3}<k$

$\boxed{3}$

2人がじゃんけんをするとき，誰がどの手を出すかに注意すると

あいこになる確率は　$\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$

勝負が決まる確率は　$1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

特定の1人が勝つ確率は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

となる．また，n 番さんは $n-2$ 回の試行の後までは

「1つ左のイスに移動（勝負が決まる）」または「移動しない（あいこ）」

しか起こらない．つまり，n 番さんが2番のイスに座るのは，最短で $n-2$ 回後であり，

n 番さんがじゃんけんを行うのは，最短で $n-1$ 回目であることに注意する．

以下ではあいこになる事象を A，勝負が決まる事象を B，k 番さんが勝つ事象を W_k，

k 番さんが負ける事象を L_k と表す．

(1) (i) 1回目に W_1 が起こり，2回目に W_3 が起こるときであるから

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

(ii) (1回目，2回目)とすると，$(W_1,\ W_1)$，$(W_1,\ A)$，$(W_2,\ W_3)$，$(A,\ W_1)$，$(A,\ A)$

となるときであるから

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{9}$$

(2) $n-2$ 回目まで B が起こり，$n-1$ 回目で W_n が起こるときであるから

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$$

(3) n 回の試行を終えたとき，n 番さんが1番のイスに座っているのは

(2) の後に W_n または A が起こる，または

$n-1$ 回目までに A が1回，B が $n-2$ 回起こり，n 回目に W_n が起こる

ときであるから，

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+{}_{n-1}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{(n+1)2^{n-2}}{3^n}$$

(4) n 回の試行を終えたとき，n 番さんが n 番のイスに座っているのは，

(2) の状態から n 回目に L_n が起こる，または

B が $n-2$ 回起こった後に L_n が起こり，どこかで A が1回起こる，または

A が n 回 が起こる

ときであるから，

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{3}+{}_{n}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{(n+1)2^{n-2}+1}{3^n}$$

別解　場合分けの仕方は様々である．

n 番さんは 2 番のイスに座るまでじゃんけんをすることがないので，何回後に初めて 2 番のイスに座るかに注目すると

ｉ）　$n-2$ 回後に初めて 2 番のイスに座る

ⅱ）　$n-1$ 回後に初めて 2 番のイスに座る

ⅲ）　2 番のイスに座ることはない

という場合がある．

ｉ）　$n-2$ 回 B が起こり，残り 2 回は $(\mathrm{L}_n,\ \mathrm{A})$，$(\mathrm{A},\ \mathrm{L}_n)$，$(\mathrm{W}_n,\ \mathrm{L}_n)$ の 3 通りであるから

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{3\cdot 2^{n-2}}{3^n}$$

ⅱ）　$n-1$ 回のうち，$n-2$ 回目までに A が 1 回起こり，残りは B が起こり，最後に W_n が起こるときであるから

$${}_{n-2}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{(n-2)\cdot 2^{n-2}}{3^n}$$

ⅲ）　A が n 回起こるときであるから　$\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$

ｉ)，ⅱ)，ⅲ) より求める確率は　$\dfrac{3\cdot 2^{2n-2}+(n-2)\cdot 2^{2n-2}+1}{3^n}=\dfrac{(n+1)\cdot 2^{2n-2}+1}{3^n}$

(5)　A が $n-1$ 回起こるか W_1 が $n-1$ 回起こるときであるから　$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{3^{n-1}}$

(6)　n 回の試行を終えたとき，全ての人が最初と同じイスに座っている確率は

A が n 回起こる

W_1 が $n-1$ 回，A が 1 回起こる

W_2，W_3，W_4，……，W_n，W_1 が起こる

ときであるから　$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^n=\dfrac{n+2}{3^n}$