解答速報　数学

医学部受験専門予備校　慧修会

2020年度　東京医科大学

【　講　評　】

大問は昨年同様4題で，記述形式の問題が廃止となり，全問マーク式となった．難易度は昨年よりもやや易しくなり，例年通りの東京医科大の難易度となった．出題内容も例年通り数Ⅲ中心で，東京医科大で頻出な $\boxed{1}$（3）（4）や $\boxed{3}$ の対策ができていたかどうかが鍵となるだろう．また，$\boxed{4}$ では東京医科大としては珍しく確率が出題されたが，標準的な問題であり解答しやすいものであった．7割弱の得点をしたい．

【　解　答　】

$\boxed{1}$　数と式（数Ⅰ）／三角関数（数Ⅱ）／微分法・積分法（数Ⅲ）：標準

(1)　$a=82$

(2)　最大値 39

(3)　m の最小値 64

(4)　m の最小値 27000

$\boxed{2}$　微分法・積分法：やや易

(1)　$b=\dfrac{41}{3}$

(2)　$V=20\sqrt{5}\pi$

(3)　$W=\dfrac{25}{4}\pi^2$

$\boxed{3}$　微分法（数Ⅲ）：標準

$F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{10}{3}$，　$S'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$，　$g'(0)=\dfrac{1}{3}$，　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{-19}{486}$

$\boxed{4}$　確率（数A）：標準

(1)　$P(A\cap B)=\dfrac{15}{64}$，　$P_A(B)=\dfrac{3}{8}$

(2)　$P(B\cup C)=\dfrac{21}{32}$，　$P_{\overline{C}}(B)=\dfrac{1}{2}$

(3)　$P(A\cap C)=\dfrac{3}{64}$，　$P_C(A\cup B)=\dfrac{1}{4}$

【 解 説 】

$\boxed{1}$

(1) $301\sqrt{a}-319\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3=a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-b\sqrt{b}$

$$=(a+3b)\sqrt{a}-(3a+b)\sqrt{b}$$

$$(a+3b-301)\sqrt{a}=(3a+b-319)\sqrt{b}$$

$a+3b-301\fallingdotseq 0$ のとき　$\sqrt{a}=\dfrac{319-3a-b}{301-a-3b}\sqrt{b}$

両辺に $\sqrt{b}$ をかけると　$\sqrt{ab}=\dfrac{(319-3a-b)b}{301-a-3b}$

これが成り立つとき，a，b は正の整数であるから　$301-a-3b=\pm 1$

これは $\sqrt{ab}$ が整数でないことに矛盾する．

よって $a+3b-301=0$ であり，このとき $3a+b-319=0$ であるから，

これを解くと　$a=82$，$b=73$

(2) β を定数，α を変数とみると

$$\sqrt{15\sin\beta}\sin\alpha+6\sqrt{\cos\beta}\cos\alpha=\sqrt{15\sin\beta+36\cos\beta}\sin(\alpha+\theta)$$

ただし θ は $\sin\theta=\dfrac{6\sqrt{\cos\beta}}{\sqrt{15\sin\beta+36\cos\beta}}$，　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15\sin\beta}}{\sqrt{15\sin\beta+36\cos\beta}}$ を満たす．

$0\leqq\alpha<2\pi$ より $\theta\leqq\alpha+\theta<2\pi+\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，

$$\left|\sqrt{15\sin\beta+36\cos\beta}\sin(\alpha+\theta)\right|\leqq\sqrt{15\sin\beta+36\cos\beta}$$

$$\therefore\ (6\cos\alpha\sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha\sqrt{15\sin\beta})^2\leqq 15\sin\beta+36\cos\beta$$

等号は $\alpha+\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のときに成り立つから，β を変数としたときの $15\sin\beta+36\cos\beta$ の

最大値が，求める最大値である．

$$15\sin\beta+36\cos\beta=3(5\sin\beta+12\cos\beta)=39\sin(\beta+\varphi)$$

ただし φ は $\sin\varphi=\dfrac{12}{13}$，　$\cos\varphi=\dfrac{5}{13}$ を満たす．

$0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\varphi\leqq\beta+\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}+\varphi$ $\left(\dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，

$\beta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 39 をとる．

別解　コーシー・シュワルツの不等式を利用することもできる．

実数 a，b，x，y について

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

が成り立つ．ただし，等号が成り立つのは $a:b=x:y$ のときである．

$a=\sqrt{15\sin\beta}$，$b=6\sqrt{\cos\beta}$，$x=\sin\alpha$，$y=\cos\alpha$ とすると

$$(15\sin\beta+36\cos\beta)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \geqq (\sqrt{15\sin\beta}\sin\alpha+6\sqrt{\cos\beta}\cos\alpha)^2$$

$$\therefore\ 3(5\sin\beta+12\cos\beta) \geqq (\sqrt{15\sin\beta}\sin\alpha+6\sqrt{\cos\beta}\cos\alpha)^2 \quad \cdots\cdots①$$

ここで　$5\sin\beta+12\cos\beta=13\sin(\beta+\theta)$

ただし θ は $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$，$\cos\theta=\dfrac{5}{13}$ を満たす．

$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\theta \leqq \beta+\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}+\theta$ $\left(\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$5\sin\beta+12\cos\beta$

$\beta+\theta=\dfrac{\pi}{2}$，つまり $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ のとき最大値 13 をとる．

よって ① より　$(\sqrt{15\sin\beta}\sin\alpha+6\sqrt{\cos\beta}\cos\alpha)^2 \leqq 3\cdot 13=39$

等号が成り立つとき　$\sqrt{15\sin\beta}:6\sqrt{\cos\beta}=\sin\alpha:\cos\alpha$

$$\sqrt{15\sin\beta}\cos\alpha=6\sqrt{\cos\beta}\sin\alpha \quad \cdots\cdots②$$

$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ より

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=\frac{5}{13},\quad \cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{12}{13}$$

であるから ② より　$5\sqrt{\dfrac{3}{13}}\cos\alpha=12\sqrt{\dfrac{3}{13}}\sin\alpha$　　$\therefore\ \tan\alpha=\dfrac{5}{12}$

これを満たす $\alpha\,(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ は確かに存在する．

以上より最大値は 39

(3)　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ $(x>0)$ とおくと　$f'(x)=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}<0$

よって $f(x)$ は単調に減少するから $m \leqq x \leqq m+1$ のとき　$f(m+1) \leqq f(x) \leqq f(m)$

各辺を $m \leqq x \leqq m+1$ で定積分すると　$\displaystyle\int_m^{m+1} f(m+1)dx<\int_m^{m+1} f(x)dx<\int_m^{m+1} f(m)dx$

$\displaystyle\int_m^{m+1} f(x)dx=\Big[x^{\frac{1}{3}}\Big]_m^{m+1}=\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}$ であるから

$$f(m+1)<\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<f(m)$$

$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\dfrac{1}{48}$ となるには　$f(m+1)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(m+1)^2}}<\dfrac{1}{48}$　　$\therefore\ 63<m$

が必要であり，これを満たす最小の m は　$m=64$

逆に $m=64$ のとき　$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<f(64)=\dfrac{1}{48}$

となるから確かに成り立つ．

$\boxed{別解}$　平均値の定理を用いて評価しやすい式に変形してもよい.

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ $(x>0)$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f(x)$ は $x>0$ において連続かつ微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{f(m+1)-f(m)}{(m+1)-m}=\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}=f'(c)=\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$$

となる実数 c $(m<c<m+1)$ が存在する.

$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\dfrac{1}{48}$ のとき　$\dfrac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}<\dfrac{1}{48}$　……①

また $f'(x)$ は減少するから $m<c<m+1$ より　$f'(m+1)<f'(c)<f'(m)$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{(m+1)^2}}<\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}<\frac{1}{3\sqrt[3]{m^2}}\quad\cdots\cdots②$$

①，② が成り立つとき　$\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(m+1)^2}}<\dfrac{1}{48}$

$$16<\sqrt[3]{(m+1)^2}$$

$$2^6<m+1\qquad\therefore\ 63<m$$

が必要であり，これを満たす最小の m は　$m=\mathbf{64}$

このとき ② より　$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}<\dfrac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}=\dfrac{1}{48}$

となるから確かに ① は成り立つ.

(4)　$g(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ $(x>0)$ とおくと　$g'(x)=\dfrac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}>0$

よって $g(x)$ は単調に増加するから $m\leqq x\leqq m+1$ のとき　$g(m)\leqq g(x)\leqq g(m+1)$

各辺を $m\leqq x\leqq m+1$ で定積分すると　$g(m)<\displaystyle\int_m^{m+1}g(x)dx<g(m+1)$

$\displaystyle\int_m^{m+1}g(x)dx=\left[x^{\frac{4}{3}}\right]_m^{m+1}=(\sqrt[3]{m+1})^4-(\sqrt[3]{m})^4$ であるから

$$g(m)<(\sqrt[3]{m+1})^4-(\sqrt[3]{m})^4<g(m+1)$$

$(\sqrt[3]{m+1})^4-(\sqrt[3]{m})^4>40$ となるには

$$g(m+1)=\frac{4}{3}(m+1)^{\frac{1}{3}}>40\qquad\therefore\ m>26999$$

が必要であり，これを満たす最小の m は　$m=\mathbf{27000}$

逆に $m=27000$ のとき　$g(27000)=40<(\sqrt[3]{m+1})^4-(\sqrt[3]{m})^3$

となるから，確かに成り立つ.

別解　平均値の定理を用いて評価しやすい式に変形してもよい．

$g(x)=(\sqrt[3]{x})^4=x^{\frac{4}{3}}\ (x>0)$ とすると　　$g'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

$g(x)$ は $x>0$ において連続かつ微分可能であるから，平均値の定理により

$$\frac{g(m+1)-g(m)}{m+1-m}=(\sqrt[3]{m+1})^4-(\sqrt[3]{m})^4=g'(d)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{d}$$

となる実数 $d\ (m<d<n+1)$ が存在する．

$(\sqrt[3]{m+1})^4-(\sqrt[3]{m})^4>40$ のとき　　$\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{d}>40$　……③

また $g'(x)$ は増加するから $m<d<m+1$ より　　$g'(m)<g'(d)<g'(m+1)$

$$\frac{4}{3}\sqrt[3]{m}<\frac{4}{3}\sqrt[3]{d}<\frac{4}{3}\sqrt[3]{m+1}\quad\cdots\cdots④$$

③，④ が成り立つとき　　$40<\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{m+1}$　　$\therefore\ 26999<m$

が必要であり，これを満たす最小の m は　　$m=27000$

逆に $m=27000$ のとき ④ より　$(\sqrt[3]{m+1})^4-(\sqrt[3]{m})^4=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{d}>\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{27000}=40$

となるから，確かに ③ は成り立つ．

$\boxed{2}$

(1)　$x^4+y^2=25$ の両辺を x で微分すると　$4x^3+2yy'=0$　　$\therefore$ $2x^3+yy'=0$

$(x,\ y)=(2,\ 3)$ のとき　$16+3y'=0$　　$\therefore$ $y'=-\dfrac{16}{3}$

よって $(2,\ 3)$ における接線の方程式は　$y=-\dfrac{16}{3}(x-2)+3=-\dfrac{16}{3}x+\dfrac{41}{3}$

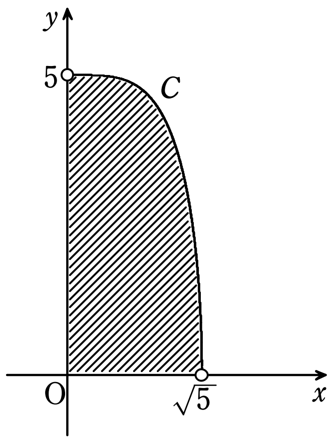
したがって y 切片 b は　　$b=\dfrac{41}{3}$

(2)　$x^4=25-y^2\geqq 0$ より　$0<y\leqq 5$

　$y^2=25-x^4\geqq 0$ より　　$0<x\leqq\sqrt{5}$

$x>0,\ \ y>0$ のとき　$y'=-\dfrac{2x^3}{y}<0$

よって曲線 C の概形は右図のようになる．



図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転させて

得られる立体の体積が V であるから

$$V=\int_0^{\sqrt{5}}\pi x^2dx=\pi\int_0^{\sqrt{5}}(25-y^4)dy$$

$$=\pi\left[25y-\frac{1}{5}y^5\right]_0^{\sqrt{5}}=\pi\left(25\sqrt{5}-5\sqrt{5}\right)=20\sqrt{5}\pi$$

(3)　$x^4+y^2=25$ より　　$x^4=25-y^2$

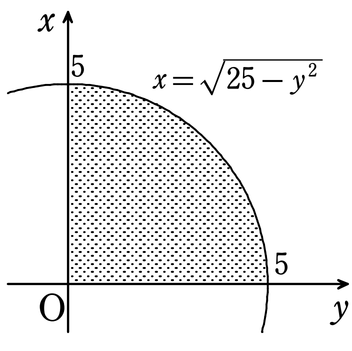
$x^2\geqq 0$ であるから　　$x^2=\sqrt{25-y^2}$

図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積が W であるから

$$W=\int_0^5\pi x^2dy=\pi\int_0^5\sqrt{25-y^2}\,dy$$

$\displaystyle\int_0^5\sqrt{25-y^2}\,dy$ は半径 5 の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ に等しいから

$$W=\pi\times\frac{1}{4}\cdot 5^2\cdot\pi=\frac{25}{4}\pi^2$$



$\boxed{3}$

(1)　$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ より　　$F'(x)=f(x)$

よって　$F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{9+\dfrac{19}{9}}=\dfrac{10}{3}$

$S(x)$ について $x+t=u$ とおくと $\dfrac{dt}{du}=1$，

t	$0\longrightarrow x$
u	$x\longrightarrow 2x$

であるから

$$S(x)=\int_x^{2x} f(u)du$$

よって　　$S'(x)=2f(2x)-f(x)$

したがって　$S'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2f(\pi)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cdot\sqrt{9}-\dfrac{10}{3}=\dfrac{8}{3}$

(2)　$y=S(x)$ の逆関数が $g(x)=S^{-1}(x)$ であるから　$g(S(x))=x$

両辺を x で微分すると　　$S'(x)g'(S(x))=1$　……②

$x=0$ のとき　$S(0)=0$，$S'(0)=2f(0)-f(0)=f(0)=3$　……③

これらを ② に代入すると　　$3\cdot g'(0)=1$　　$\therefore$　$g'(0)=\dfrac{1}{3}$　……④

① をさらに x で微分すると　　$S''(x)g'(S(x))+\{S'(x)\}^2g''(S(x))=0$

$x=0$ のとき　　$S''(0)g'(0)+\{S'(0)\}^2g''(0)=0$　……⑤

ここで　$f'(x)=\dfrac{19}{9}\cos x\cdot\dfrac{1}{2}\left(9+\dfrac{19}{9}\sin x\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{19\cos x}{18\sqrt{9+\dfrac{19}{9}\sin x}}$

よって　　$f'(0)=\dfrac{19}{18\sqrt{9}}=\dfrac{19}{54}$

また　　$S''(x)=4f'(2x)-f'(x)$　　$\therefore$　$S''(0)=4f'(0)-f'(0)=3f'(0)=\dfrac{19}{18}$

これらと ③，④ を ⑤ に代入すると

$$S''(0)g'(0)+\{S'(0)\}^2g''(0)=0$$

$$\frac{19}{18}\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot g''(0)=0 \qquad \therefore\ g''(0)=-\frac{19}{486}$$

したがって　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=g''(0)=-\frac{19}{486}$

$\boxed{4}$

(1)　$P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{15}{64}$　……①

よって　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{15}{64}}{\frac{5}{8}}=\dfrac{3}{8}$

(2)　$P(B\cap C)=P_B(C)\times P(B)=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{32}$　……②

よって　$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{16}-\dfrac{1}{32}=\dfrac{21}{32}$

また　$P(\overline{C})=1-P(C)=1-\dfrac{5}{16}=\dfrac{11}{16}$，$P(\overline{C}\cap B)=P(B)-P(B\cap C)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{32}=\dfrac{11}{32}$

であるから　$P_{\overline{C}}(B)=\dfrac{P(\overline{C}\cap B)}{P(\overline{C})}=\dfrac{\frac{11}{16}}{\frac{11}{32}}=\dfrac{1}{2}$

(3)　下の式が一般に成り立つ.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

①，②，$P(A)=\dfrac{5}{8}$，$P(B)=\dfrac{3}{8}$，$P(C)=\dfrac{5}{16}$，および $P(A\cup B\cup C)=1$，$P(A\cap B\cap C)=0$

に注意すると　$1=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{16}-\dfrac{15}{64}-\dfrac{1}{32}-P(A\cap C)+0$　　$\therefore\ P(A\cap C)=\dfrac{3}{64}$

また　$P(C\cap(A\cup B))=P(A\cap C)+P(B\cap C)=\dfrac{3}{64}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{5}{64}$

以上より　$P_C(A\cup B)=\dfrac{P(C\cap(A\cup B))}{P(C)}=\dfrac{\frac{5}{64}}{\frac{5}{16}}=\dfrac{1}{4}$

別解　$P(A\cap C)$ は余事象を求めても良い.

$$P(\overline{A\cap C})=P(\overline{A}\cup\overline{C})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{C})$$

ここで $P(A\cap B\cap C)=0$，$P(A\cup B\cup C)=1$ に注意すると

$$P(\overline{A}\cap\overline{C})=P(B)-P(A\cap B)-P(B\cap C)$$
$$=\frac{3}{8}-\frac{15}{64}-\frac{1}{32}=\frac{7}{64}$$

よって　$P(\overline{A\cap C})=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{7}{64}=\dfrac{61}{64}$

したがって　$P(A\cap C)=1-P(\overline{A\cap C})=1-\dfrac{61}{64}=\dfrac{3}{64}$