解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2020 年度　東京慈恵会医科大学

【　講　評　】

大問１の小問集合（空欄補充）が１問だけとなった点を除けば，例年通りの出題である．また，頻出分野である確率，微分・積分（数Ⅲ），整数の性質，空間図形から出題であったため，しっかりと対策ができていた人も多かっただろう．　とはいえ難易度は高い．総合で６割弱の得点を目指したい．以下，大問ごとに述べる．

１．受験生なら１度は解いたことのある問題であろう．確実に得点したい．

２．（1）の証明は落とせない．（2）も区分求積法，数列和の面積評価と，難関大受験者にとっては必須の内容である．正確な記述を行い，完答したい問題である．

３．（1）の証明は問題ないだろう．（2）は示すべきことを正確に数式でとらえられたか，（1）を利用できる形を作り出せたかという点がポイントで，整数の証明問題に慣れ親しんでいない人にとっては厳しい問題であっただろう．

４．（1）（2）ともに，正四面体や正三角形の対称性から，正解の図の状態がイメージできた人は少なくないと思うが，そのことをしっかりと論述できたかどうかがポイントとなる．また（2）は，図形，座標，ベクトルと様々な解法が使いこなせるかがポイントで，実力差の出る問題であった．

【　解　答　】

１．確率【標準】

（ア）：$\frac{3}{5}$,　　（イ）：$\frac{2}{225}$

２．微分法・積分法（数Ⅲ）【標準】

(1)　解説参照,　　(2)　p^x

３．整数の性質【標準】

(1)　解説参照,　　(2)　解説参照

４．空間図形【やや難】

(1)　$\sqrt{6}$,　　(2)　$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

【　解　説　】

［1］

袋 A，B それぞれから取り出す 2 個の玉を (赤，白) のように表す.

(ア)　1 回の操作のあと，袋 A に白玉が 2 個以上あるのは，次の 2 通りである.

（ i ）　A から 赤と白を 1 つずつ取り出し，B から白を 2 つ取り出す

（ ii ）　A から赤を 2 つ取り出し，B から白を 1 つ以上取り出す

(i) の確率は　$\dfrac{{}_3C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_4C_2} \times \dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \dfrac{1}{5}$

(ii) の確率は　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2} \times \left(1 - \dfrac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\right) = \dfrac{2}{5}$

よって求める確率は　$\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$

(イ)　2 回の操作後に，袋A の中が白玉だけになるには，1 回の操作後に袋 A の中の赤玉が 2 個以下である必要がある.

1 回の操作後に袋 A の中の赤玉が 1 個となるのは，A から赤 2 個を取り出し，B から白 2 個を取り出すときであるから，その確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2} \times \dfrac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \dfrac{1}{10}$ である.

よって (ア) の結果より，1 回の操作後に袋 A の中の赤玉が 2 個となる確率は

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

（ i ）　1 回目の操作の後に袋 A の中に赤玉が 1 個あるとき

2 回目は袋 A から赤玉を 1 個，白玉を 1 個取り出し，袋 B から白玉を 2 個取り出すときであるから，その確率は

$$\frac{1}{10} \times \frac{{}_1C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15}$$

（ ii ）　1 回目の操作の後に袋 A の中に赤玉が 2 個あるとき

2 回目は袋 A から赤玉を 2 個取り出し，袋 B から白玉を 2 個取り出すときであるから，その確率は　$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2} \times \dfrac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{15}$

(i)，(ii) より求める確率は　$\dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{15} = \dfrac{2}{225}$

［2］

(1)　$f(t)=\log(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$ $(t \geqq 0)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{t}{(1+t)^2} \geqq 0$$

よって $f(t)$ は $t \geqq 0$ において単調に増加し，$f(0)=0$ であるから　　$f(t) \geqq 0$

$g(t)=t-\log(1+t)$ $(t \geqq 0)$ とおくと

$$g'(t)=1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t} \geqq 0$$

よって $g(t)$ は $t \geqq 0$ において単調に増加し，$g(0)=0$ であるから　　$g(t) \geqq 0$

したがって $t \geqq 0$ のとき，$\dfrac{t}{1+t} \leqq \log(1+t) \leqq t$ が成り立つ．　■

(2)　$f_n(x)>0$ であるから，自然対数をとると

$$\log f_n(x)=\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x}{pn}\right)$$

$$=\log\left(1+\frac{x}{n}\right)+\log\left(1+\frac{x}{n+1}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{x}{pn}\right)$$

$$=\sum_{k=n}^{pn}\log\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

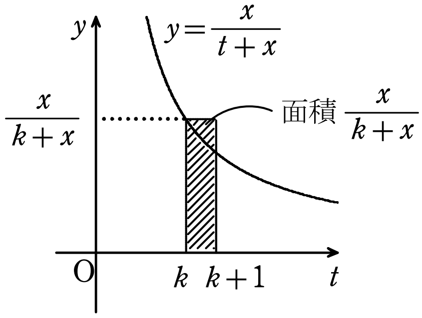
$x>0$，$n \leqq k \leqq pn$ より $\dfrac{x}{k}>0$ であるから，(1) の不等式で $t=\dfrac{x}{k}>0$ とすると

$$\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}} \leqq \log\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqq \frac{x}{k} \qquad \therefore\ \frac{x}{k+x} \leqq \log\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqq \frac{x}{k}$$

各辺の $k=n$，$n+1$，…，pn における和をとると

$$\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k+x} \leqq \log f_n(x) \leqq \sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k} \quad \cdots\cdots①$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{\frac{k}{n}}=\int_1^p\frac{x}{t}dt=\Big[x\log t\Big]_0^p=x\log p$　……②



また $k \leqq t \leqq k+1$ のとき　$k+x \leqq t+x \leqq k+x+1$

逆数をとると　　$\dfrac{x}{t+x}<\dfrac{x}{k+x}$

両辺を $k \leqq t \leqq k+1$ で定積分すると

$$\int_k^{k+1}\frac{x}{t+x}dt<\int_k^{k+1}\frac{x}{k+x}dt=\frac{x}{k+x}$$

$k=n$，$n+1$，$n+2$，……，pn での和をとると

$$\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k+x}>\sum_{k=n}^{pn}\int_k^{k+1}\frac{x}{t+x}dt=\int_n^{pn+1}\frac{x}{t+x}dt=\Big[x\log(t+x)\Big]_n^{pn+1}=x\log\frac{pn+x+1}{n+x}$$

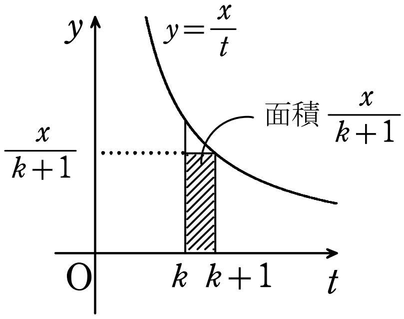
よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k+x}>\lim_{n\to\infty}x\log\frac{pn+x+1}{n+x}=\lim_{n\to\infty}x\log p$　……③

①，②，③ により，はさみうちの原理によって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log f_n(x)=x\log p=\log p^x$

$y=\log x$ の連続性より　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)=p^x$

別解　①式を上から評価してしまえば，区分求積法を用いなくても良い．

$k \leqq t \leqq k+1$ のとき　$\dfrac{x}{k+1} \leqq \dfrac{x}{t} \leqq \dfrac{x}{k}$



$k \leqq t \leqq k+1$ で定積分すると

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{t}dt > \int_k^{k+1} \frac{x}{k+1}dt = \frac{x}{k+1}$$

$k=n-1$，n，……，$pn-1$ での和をとると

$$\sum_{k=n-1}^{pn-1} \frac{x}{k+1} < \sum_{k=n-1}^{pn-1} \int_k^{k+1} \frac{x}{t}dt = \int_{n-1}^{pn} \frac{x}{t}dt$$

$$\therefore \ \sum_{k=n}^{pn} \frac{x}{k} < \Big[x\log|t| \Big]_{n-1}^{pn} = x\log\frac{pn}{n-1}$$

よって　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{pn} \frac{x}{k} < \lim_{n\to\infty} x\log\frac{pn}{n-1} = x\log p$

［3］

(1)　a が 2^n の倍数で，2^{n+1} の倍数ではないとき，k を奇数として $a=2^nk$ と表せる．

よって　$a(a+b)=2^nk(2^nk+b)$　……①

$2a(2a+b)=2^{n+1}k(2^{n+1}k+b)$　……②

ここで自然数 b は 4 の倍数ではないから，次の 2 通りが考えられる．

(ｉ) b が奇数であるとき

k，$2^{n+1}k+b$ は奇数であるから，② より $2a(2a+b)$ は 2^{n+1} の倍数であるが，

2^{n+2} の倍数ではない．

(ⅱ) b が 4 の倍数ではない偶数であるとき

l を自然数とすると $b=4l-2$ とおけるから，① より

$$a(a+b)=2^nk(2^nk+4l-2)=2^{n+1}k(2^{n-1}k+2l-1)$$

$2^{n-1}k+2l-1$ は奇数であるから，$a(a+b)$ は 2^{n+1} の倍数であるが，

2^{n+2} の倍数ではない．

(ｉ),(ⅱ) より，$a(a+b)$ または $2a(2a+b)$ のどちらかは，2^{n+1} の倍数であるが，

2^{n+2} の倍数ではない．　■

(2)　a_n，b，n は自然数であるから

$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ が小数第 n 位が 5 の小数第 n 位までの有限小数

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}\times 10^n$ が自然数かつ 1 桁目の数字が 5

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{5^n}{2^n}a_n(a_n+b)$ が自然数かつ 5 の倍数かつ偶数でない

$\Leftrightarrow$ $a_n(a_n+b)$ が 2^n の倍数であるが 2^{n+1} の倍数でない　……①

よって ① を満たす a_n が存在することを示す．

m を奇数とし，$c_n=2^{n-1}m$ とおくと，$n\geqq 3$ より $n-1\geqq 2$，b は 4 の倍数で

ないから，(1) より $c_n(c_n+b)$ と $2c_n(2c_n+b)$ のいずれかは 2^n の倍数であるが，

2^{n+1} の倍数ではない．

$c_n(c_n+b)$ が条件を満たすならば $a_n=c_n$，$2c_n(2c_n+b)$ が条件を満たすならば

$a_n=2c_n$ とすれば，① を満たす a_n となる．よって ① を満たす a_n は存在する．■

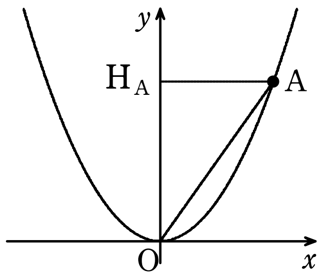
［4］

(1)　点 A，B の y 座標を y_A，y_B $(y_A>0,\ y_B>0)$ とする.

$y=x^2$ より　　$x=\pm\sqrt{y}$

A，B から y 軸へ垂線 AH_A，BH_B を下すと　$AH_A=\sqrt{y_A}$，$BH_B=\sqrt{y_B}$

よって　　$OA=\sqrt{y_A+{y_A}^2}$，$OB=\sqrt{y_B+{y_B}^2}$



正四面体 OABC について OA＝OB であるから

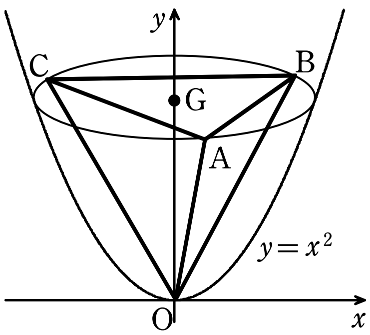
$$\sqrt{y_A+{y_A}^2}=\sqrt{y_B+{y_B}^2}$$

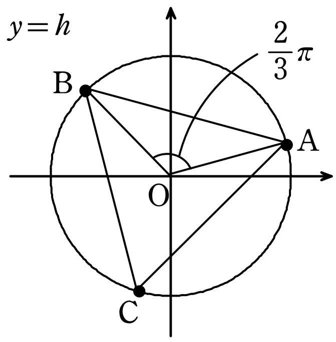
$${y_A}^2-{y_B}^2+y_A-y_B=0$$

$$\therefore\ (y_A-y_B)(y_A+y_B+1)=0$$

$y_A>0$，$y_B>0$ より $y_A+y_B+1\fallingdotseq 0$ であるから $y_A=y_B$ である.

点 A と点 C，点 B と点 C にも同じことが言えるから，3 点 A，B，C の y 座標は等しい.





3 点 A，B，C の y 座標を $y=h\,(h>0)$ とおくと　　$OA=OB=OC=\sqrt{h+h^2}$

また $G(0,\ 0,\ h)$ をとると　　$AG=BG=CG=\sqrt{h}$

ここで OA＝OB＝OC かつ OG⊥△ABC であり，△ABC は正三角形であるから

G は △ABC の外心かつ重心である．よって $\angle AGB=\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$$AB=BC=CA=2\cdot\frac{\sqrt{3h}}{2}=\sqrt{3h}$$

OA＝AB より　　$\sqrt{3h}=\sqrt{h+h^2}$　　$\therefore\ h=2$

よって正四面体 OABC の一辺の長さは　$\sqrt{3h}=\sqrt{6}$

$\boxed{\text{参考}}$

$y=x^2$ を y 軸の周りに回転させて得られる回転放物面 S の方程式は

$$x^2+y^2=y\quad\cdots\cdots①$$

と表される．これを用いると，回転放物面上の任意の点 $(x,\ y,\ z)$ と O との距離は

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{y^2+y}$$

となるから，y のみに依存し単調増加関数であるため，OA＝OB＝OC となるとき

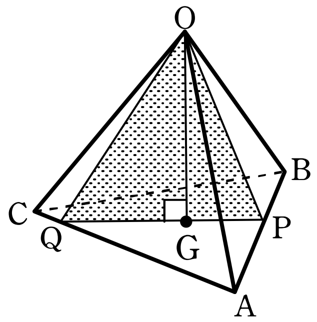
A，B，C の y 座標が一致することがわかる.

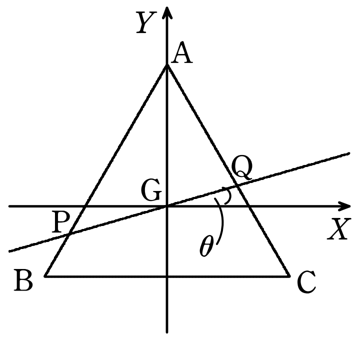
(2)　(1) より G(0, 0, 2) である．

OG は xy 平面に含まれるから，OG を含む平面による正四面体 OABC の切り口の面積の最小値を求めれば良い．図形の対称性から，平面が AB, BC と交わるとしても一般性を失わない．この交点を P, Q とする．

OG⊥△ABC, OG＝2 より，切り口の面積は　$\dfrac{1}{2}\times \mathrm{PQ}\times \mathrm{OG}=\mathrm{PQ}$

よって，以下 PQ の最小値について考える．





G を 原点，A$(0, \sqrt{2})$ となるように XY 平面を定めると，直線 AB, AC の方程式は

$$Y=\pm\sqrt{3}X+\sqrt{2}\quad \cdots\cdots ①$$

となる．また，直線 PQ の傾きを $\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}\right)$とすると，直線 PQ の方程式は

$$Y=(\tan\theta)X\quad \cdots\cdots ②$$

①, ② を連立させて，2 点 P, Q の X 座標 $\dfrac{\sqrt{2}}{\tan\theta-\sqrt{3}}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{\tan\theta+\sqrt{3}}$ が得られる．

よって PQ の長さは，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq\tan\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ に注意すると

$$\sqrt{1+\tan^2\theta}\left|\frac{\sqrt{2}}{\tan\theta-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\tan\theta+\sqrt{3}}\right|=\frac{2\sqrt{6}}{\cos\theta(3-\tan^2\theta)}$$

ここで $f(\theta)=\cos\theta(3-\tan^2\theta)$ とおくと，$f(-\theta)=f(\theta)$ であり，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき単調に減少するから，$f(\theta)$ は $\theta=0$ のとき極大かつ最大となり，このとき PQ は最小となる．したがって求める面積の最小値は，$\theta=0$ のとき $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ である．

別解　座標を用いずに，図形的に PQ の長さを求め，最小値を考えてもよい．

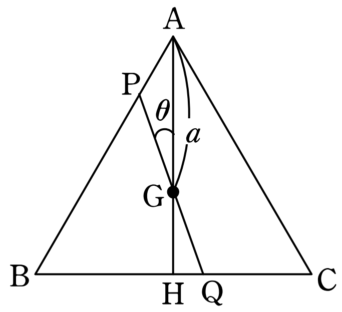
$\angle\mathrm{AGP}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$ とおく．また， $\mathrm{AG}=\sqrt{2}=a$ とおく．

$\angle\mathrm{GAP}=\dfrac{\pi}{6}$， $\angle\mathrm{APG}=\dfrac{5}{6}\pi-\theta$ であるから，$\triangle\mathrm{APG}$ に正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{PG}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\frac{\mathrm{AG}}{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)}\qquad\therefore\ \mathrm{PG}=\frac{a}{2\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

また，A から BC へ垂線 AH を下すと $\angle\mathrm{QGH}=\theta$， $\mathrm{GH}=\dfrac{a}{2}$ であるから，

直角三角形 GHQ に注目して　$\mathrm{GQ}=\dfrac{\mathrm{GH}}{\cos\theta}=\dfrac{a}{2\cos\theta}$



よって　$\mathrm{PQ}=\mathrm{PG}+\mathrm{GQ}=\dfrac{a}{2\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)}+\dfrac{a}{2\cos\theta}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)>0$， $\cos\theta>0$ であるから，

相加・相乗平均の不等式により

$$\mathrm{PQ}\geqq\frac{a}{2}\cdot2\sqrt{\frac{1}{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)\cos\theta}}=\frac{a}{\sqrt{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)\cos\theta}}$$

等号が成り立つのは $\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)=\cos\theta$，つまり $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときである．

また積和変換により

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\cos\theta=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{5}{6}\pi+\sin\left(\frac{5}{6}\pi-2\theta\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right\}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ より $\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5}{6}\pi-2\theta<\dfrac{5}{6}\pi$ であるから，

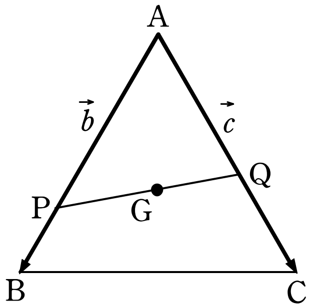
$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\cos\theta=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right\}\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}$$

これも $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときに等号が成り立つから，PQ が最小となるのは，

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\mathrm{PQ}=\dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}a=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

別解　ベクトルも有効である.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする.



点 P を AB 上の点, 点 Q を AC 上の点とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\vec{b}\ (0<p<1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=q\vec{c}\ (0<q<1)$$

とおける.

PQ 上に点 G があるから, t を実数とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)p\vec{b}+tq\vec{c}\quad \cdots\cdots ①$$

と表せる. また, 点 G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\quad \cdots\cdots ②$$

と表せる.

$\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\nparallel\vec{c}$ であるから, ①, ② より

$$(1-t)p=\frac{1}{3},\quad tq=\frac{1}{3}\qquad \therefore\ 1-t=\frac{1}{3p},\quad t=\frac{1}{3q}$$

2 式の和をとると　$1=\dfrac{1}{3p}+\dfrac{1}{3q}$　$\therefore\ 3pq=p+q\quad \cdots\cdots ③$

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{6}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=3$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=|q\vec{c}-p\vec{b}|^2=q^2|\vec{c}|^2-2pq\vec{b}\cdot\vec{c}+p^2|\vec{b}|^2\\&=6(p^2+q^2)-6pq=6\{(p+q)^2-2pq\}-6pq=6(p+q)^2-18pq\end{aligned}$$

③ を代入すると　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=6(3pq)^2-18pq=54(pq)^2-18pq=54\left(pq-\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

ここで $p>0$, $q>0$ であるから, ③ と 相加・相乗平均の不等式により

$$3pq=p+q\geqq 2\sqrt{pq}\quad \cdots\cdots ④$$

等号が成り立つのは $p=q$ かつ ③ より $p=q=\dfrac{2}{3}$ のときである.

$p>0$, $q>0$ に注意して ④ 式を整理すると　$9(pq)^2-4pq\geqq 0$　$\therefore\ pq\geqq\dfrac{4}{9}$

よって $pq=\dfrac{4}{9}$ のとき, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ は最小値 $\sqrt{54\left(\dfrac{4}{9}\right)^2-18\cdot\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ をとる.