解答速報 物理

医学部受験専門予備校 慧修会

2020 年度　東京慈恵会医科大学

【 講 評 】

非常に「慈恵らしい」問題。ただ物理モデルを解くだけではなく、そのモデルがどういった動機の下に構成されているかを読み取らなければならない。とはいえ、実行する処理自体は非常に簡単なものであり、例年よりはやや易しいか。

$\boxed{1}$ は中性子の減速に関する衝突の問題。状況を理解しさえすれば最も単純な 1 次元の衝突問題である。問 4 までは落とせない。

$\boxed{2}$ は血管のモデル化としての交流の問題。おかしなテクニックに傾倒せず、真っ当に原理を理解していれば (処理量はやや多いものの) 難なく解けただろう。差がついた問題だと思われる。

$\boxed{3}$ は心臓のモデル化としてのサイクルの問題。特に難しいところもなく、ミスなく計算していくだけである。これは完答したい。

(補足) 普段の勉強ではなかなか意識することがないかもしれないが、そもそも自然科学は自然現象を扱いやすくモデル化することによって発展してきた。背景や応用を深く見ていくと、構造自体は単純な理論も我々の身近を記述し得るものなのだということがわかる。そのことを今一度思い起こさせてくれる問題といえるだろう。

【 解 答 ・ 解 説 】

$\boxed{1}$

解答

問 1　$m\vec{v} = m\vec{v}' + M\vec{u}$

問 2　$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}Mu^2$

問 3　$\vec{v}' = -\frac{M-m}{M+m}\vec{v}$

問 4　$\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$

問 5　解説を参照

解説

問 1　一般的な運動量保存の式を立てる。

問 2　一般的なエネルギー保存の式を立てる。

問 3　今、弾性衝突であることから、$\vec{v} = \vec{u} - \vec{v}'$ が成立する。これと問 1 の運動量保存の式を連立すると、

$$\vec{v}' = -\frac{M-m}{M+m}\vec{v}$$

である。$M > m$ より、これは負の値である。

問 4　運動エネルギーは速さの 2 乗に比例する。前問より、速さは $\frac{M-m}{M+m}$ 倍になるから、運動エネルギーは $\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$ 倍になる。

問 5　問 4 の答えを見ると、M が m に近いほど中性子の運動エネルギーは小さくなる。よって、中性子に近い質量を持った原子を含む物質を減速材に使うと良いことが分かる。また、衝突頻度を上げるため密度の高い物質を使う必要がある。実際、水素原子を含む液体である水が使われる。

$\boxed{2}$

解答

問 1　$I_C(t) = \omega C(A\cos\omega t - B\sin\omega t)$

問 2　$I(t) = \left(\dfrac{B}{R} + \omega CA\right)\cos\omega t + \left(\dfrac{A}{R} - \omega CB\right)\sin\omega t$

問 3　$V_L(t) = \omega L\left(\dfrac{A}{R} - \omega CB\right)\cos\omega t - \omega L\left(\dfrac{B}{R} + \omega CA\right)\sin\omega t$

問 4　$\dfrac{\omega L}{R}A + \left(1 - \omega^2 LC\right)B = 0$,　　$A = \dfrac{\left(1 - \omega^2 LC\right)R^2}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 R^2 + (\omega L)^2}V_0$

問 5　(1)　$\tan\phi = \omega CR$,　　$I_0 = V_0\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$

(2)　$\left(\dfrac{1}{R^2} + (\omega C)^2\right)^{-1/2}$　　　(3)　R

(4)　解説を参照

解説

問 1　コンデンサーに流れる電流の位相は電圧より $\pi/2$ だけ進む。また、その電流に対する電圧の比を表すインピーダンスは $\dfrac{1}{\omega C}$ である。よって、電圧の $A\sin\omega t$ の成分に起因する電流は $\omega CA\cos\omega t$ であり、$B\cos\omega t$ の成分に起因する電流は $-\omega CB\sin\omega t$ である。合わせて、$I_C(t) = \omega C(A\cos\omega t - B\sin\omega t)$ となる。

問 2　コンデンサーと抵抗が並列で接続されており、抵抗にかかる電圧は (コンデンサーと同じく)$V_C(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ である。よって、抵抗に流れる電流は $I_R(t) = \dfrac{V_C(t)}{R} = \dfrac{A}{R}\sin\omega t + \dfrac{B}{R}\cos\omega t$ である。
$I(t)$ は、コンデンサーを流れる電流と抵抗を流れる電流の和で表され、

$$I(t) = I_C(t) + I_R(t) = \left(\frac{B}{R} + \omega CA\right)\cos\omega t + \left(\frac{A}{R} - \omega CB\right)\sin\omega t$$

である。

問 3　コイルのインピーダンスは ωL である。また､コイルに流れる電流は $I(t)$ である。コイルにかかる電圧の位相は電流より $\pi/2$ だけ進むので、$\left(\dfrac{A}{R} - \omega CB\right)\sin\omega t$ の電流成分に対応する電圧の成分は $\left(\dfrac{A}{R} - \omega CB\right)\cos\omega t$ であり、$\left(\dfrac{B}{R} + \omega CA\right)\cos\omega t$ の電流成分に対応する電圧の成分は $-\left(\dfrac{B}{R} + \omega CA\right)\cos\omega t\sin\omega t$ である。よって、それら 2 つの成分を合わせて、

$$V_L(t) = \omega L\left(\frac{A}{R} - \omega CB\right)\cos\omega t - \omega L\left(\frac{B}{R} + \omega CA\right)\sin\omega t$$

である。

問 4　キルヒホッフの法則より、$V(t)=V_C(t)+V_L(t)$ である。

よって、cos 成分、sin 成分の係数についてそれぞれ恒等式を立てると、

$$\frac{\omega L}{R}A+\left(1-\omega^2LC\right)B=0$$
$$\left(1-\omega^2LC\right)A-\frac{\omega L}{R}B=V_0$$

が成立する。ここから B を消去すると、

$$A=\frac{\left(1-\omega^2LC\right)R^2}{\left(1-\omega^2LC\right)^2R^2+\left(\omega L\right)^2}V_0$$

となる。

問 5　(1) $L=0$ では、

$$I(t)=\omega CV_0\cos\omega t+\frac{V_0}{R}\sin\omega t=V_0\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C\right)^2}\sin\left(\omega t+\phi\right)$$

となる。ここで、最後の等式では三角関数の合成を用いた。

このとき、$\tan\phi=\omega CR$ であり、$I_0=V_0\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C\right)^2}$ である。

(2) インピーダンスは、電流の振幅に対する電圧の振幅の比であるから、

$$Z=\frac{V_0}{I_0}=\left(\frac{1}{R^2}+(\omega C)^2\right)^{-1/2}$$

である。

(3) 血管の弾力性が失われた状態は $C\to 0$ に対応するから、そのときのインピーダンスは R である。

(4) 可能である。動脈が硬化することは C が小さくなることに対応する。電流 (に対応する血流量) が一定だと仮定すれば、電圧に対応する血圧を測定することによりインピーダンスの変化を推定できる。C の変化とインピーダンスの変化は対応するから、これにより C の変化が推定され、動脈硬化を予測できる。

$\boxed{3}$

解答

問 1　1.33×10^2〔Pa〕　　問 2　始まり: C　終わり: A　　問 3　$V - V_0$

問 4　$(P - P_0)(V - V_0)$〔W〕　　問 5　$\dfrac{P - P_0}{V - V_0}$　　問 6　仕事 3.0〔J〕　仕事率 6.0〔W〕

解説

問 1　1〔mm〕の高さで底面積が 1〔m^2〕の水銀柱を考えると、その水銀柱の質量は 1.36×10^1〔kg〕であり、働く重力は $1.36 \times 10^1 \times 9.80 \fallingdotseq 1.33 \times 10^2$〔N〕である。これが 1〔$m^2$〕あたりの力に対応するので、求める圧力は 1.33×10^2〔Pa〕である。

問 2　左心室が収縮して圧力が上がり、血液を放出して体積が下がる、というのが求めるプロセスであるから、それに対応するのは C→B→A である。

問 3　左心室の容積が V から V_0 に下がるわけであるから、1 回の白銅で送り出される血液の量は $V - V_0$〔m^3〕である。

問 4　1 サイクルあたりの仕事は $P - V$ 図でサイクルの囲む面積に等しく、$(P - P_0)(V - V_0)$〔J〕である。
心拍数が 60 回/分、即ち 1 回/秒であるから、サイクルが 1 秒で 1 回転する。よって、1 秒あたりの仕事、即ち仕事率は $(P - P_0)(V - V_0)$〔W〕である。

問 5　1 秒間に流れる流体の体積は、心拍が 1 回/秒であるから $V - V_0$〔m^3/s〕である。また、圧力差は $P - P_0$〔Pa〕である。よって、流動抵抗は $\dfrac{P - P_0}{V - V_0}$ である。

問 6　左心室から拍出される血流量は、1 心拍あたり 0.20〔L〕$= 2.0 \times 10^{-4}$〔m^3〕である。また、圧力差は 112〔mmHg〕$\fallingdotseq 1.5 \times 10^4$〔Pa〕である。
よって、1 心拍毎に左心室がする仕事は $(P - P_0)(V - V_0) \fallingdotseq 3.0$〔J〕である。
また、1 秒あたり心拍数は 2 回であるから、1 秒あたりの仕事率は 2 心拍あたりの仕事に等しく、6.0〔W〕である。