解答速報 物理

医学部受験専門予備校 慧修会

2020 年度　東海大学　2 日目

【 講 評 】

1 日目と同じく、難易の差が大きい。解けるところから得点を稼いでいくべき。

$\boxed{1}$は円軌道をとる人工衛星の問題。設定自体はよくあるものだが、公転周期から議論を進めていく流れがやや珍しいか。万有引力だからといって、すぐ万有引力定数をおいたり面積速度一定を使ったりして遠回りをした受験生が一定数いたと思われる。平易だが解答速度に差が出た問題だろう。

$\boxed{2}$は磁場中の導体棒の問題。類題経験の有無で差がついただろう。ただそれぞれの導体棒について考えるだけなので、是非完答したい問題である。

$\boxed{3}$はよくある熱気球の問題。下に示した解説のように、比や密度を用いた状態方程式を使うなどして効率よく求められたかどうか。とはいえ、内容的には簡単なので落とせない。

$\boxed{4}$は原子核の崩壊の問題。問題文の状況を理解しさえすれば単純な力学である。しかし、試験場では焦って状況整理に手間取った受験生が多かっただろう。慣れていれば簡単だが、差がつきやすい問題である。

【 解 答 ・ 解 説 】

$\boxed{1}$

解答

(1) $\dfrac{P}{n+1}$　(2) $\left(\dfrac{gR^2P^2}{4\pi^2(n+1)^2}\right)^{1/3}$　(3) $\dfrac{P}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{R}}-1$

(4) $\left(\frac{2\pi gR^2}{P}\right)^{1/3}$　(5) $\left(\dfrac{gP^2}{4\pi^2R}\right)^{1/3}$

解説

(1) 時間 P/n で地球は $1/n$ 回転分だけ自転する。よって、時間 P/n で人工衛星は地球の周りを $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 回転することになる。ゆえに、公転周期は

$$\frac{P/n}{1+1/n}=\frac{P}{n+1}$$

である。

(2) 軌道半径を r とする。万有引力は距離の 2 乗に反比例するから、人工衛星に働く地球からの万有引力の大きさは $mg\dfrac{R^2}{r^2}$ である。また、角速度は前問より $\omega=\dfrac{2\pi(n+1)}{P}$ である。よって、円運動の運動方程式 $F=mr\omega^2$ より、$r=\left(\dfrac{gR^2P^2}{4\pi^2(n+1)^2}\right)^{1/3}$ である。

(3) 前問で求めた r が R 以上でなくてはならない。ちょうど $r=R$ のとき、$n=\dfrac{P}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{R}}-1$ であり、これが求める n の最大値である。

(4) $n\to 0$ では $\omega\to\dfrac{2\pi}{P}$ であり、$r\to\left(\dfrac{gR^2P^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$ である。よって求める速さは

$$v=r\omega=\left(\frac{2\pi gR^2}{P}\right)^{1/3}$$

である。

(5) (3) での円運動の速さは $v=\sqrt{gR}$ であり、運動エネルギーは $mgR/2$、位置エネルギーは $-mgR$ である。一方、(4) では運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{2\pi gR^2}{P}\right)^{2/3}$ であり、位置エネルギーは $-m\left(\dfrac{2\pi gR^2}{P}\right)^{2/3}$ である。

以上より (人工衛星を無限遠に飛ばすのに必要な最小のエネルギーは力学的エネルギーをゼロにするような値であることから)、求める比は $\left(\dfrac{gP^2}{4\pi^2R}\right)^{1/3}$ である。

(補足) ビリアル定理より、万有引力を中心力とする円運動では運動エネルギーが万有引力による位置エネルギーの $-1/2$ であることがわかる。この事実を用いると即座に解答が導ける。

解答

(1) $\dfrac{2RF}{B^2l^2}$　(2) $\dfrac{F}{g\tan\theta}$　(3) $\dfrac{2RF}{B^2l^2\cos\theta}$

(4) $\dfrac{RF}{Bl}$　(5) $\dfrac{RF}{Bl}$

解説

(1) 速さが一定のとき、導体棒に働く力はつり合うので、導体棒を流れる電流の大きさ I とすると $F = IBl$ となる。ここで、電流は X' 側から X 側に流れる。

導体棒の速さを v とすると、導体棒の起電力は vBl であるから、流れる電流は $I = \dfrac{vBl}{2R}$ である。これらを解くと、$v = \dfrac{2RF}{B^2l^2}$ である。

(2) 導体棒 b に働く力は水平方向に IBl であり、この斜面方向成分は斜面上側へ $IBl\cos\theta$ である。一方、重力の斜面方向成分は $mg\sin\theta$ である。これらがつり合うので、$m = \dfrac{F}{g\tan\theta}$ である。

(3) 導体棒 b の速さ v' とすると、b の起電力は $v'Bl\cos\theta$ であるから、流れる電流は $I = \dfrac{v'Bl}{2R}\cos\theta$ である。また、等速運動では力がつり合うので、$IBl\cos\theta = mg\sin\theta$ である。よって、m を代入すれば、$v' = \dfrac{2RF}{B^2l^2\cos\theta}$ とわかる。

(4) スイッチ S を閉じた直後は、b に流れる電流は E/R である。このとき、磁場による力の斜面方向成分が重力の斜面方向成分より大きくなければならないので、$\dfrac{E}{R}Bl\cos\theta > mg\sin\theta$ であり、m の値を代入すれば $E > \dfrac{RF}{Bl}$ である。

(5) まず、a が等速で動くとき、a に流れる電流は 0 である。

また、b に流れる電流 I とすれば、b についての力のつり合いより、$IBl\cos\theta = mg\sin\theta$ である。電池に流れる電流も I であり、電池のする仕事率は IE であるから、求める仕事率は $\dfrac{RF}{Bl}$ である。

解答

(1) イ　(2) イ　(3) オ　(4) オ　(5) エ

解説

(1) 以下の説明では単位は省略する。

密度を用いた状態方程式 $PM = \rho RT$ より、$\dfrac{P}{\rho T}$ が一定となる。よって、ρ は圧力 P と温度 T を用いて $\dfrac{P}{T}$ に比例することが分かる。

さて、この問題では、圧力が外気と等しく、温度が T_0 から T に変化しているので、上に述べた比例関係より、求める密度は $\rho = \dfrac{T_0}{T}\rho_0$ であることが分かる。

(2) 気球の密度と大気の密度が一致すれば気球は浮き上がるので、気球内の空気の密度 ρ_1、空気を除いた熱気球全体の質量 M として、

$$\frac{\rho_1 V + M}{V} = \rho_0$$

が浮き上がる瞬間に成立する (左辺の分子は気球全体の質量)。これと前問より $\rho_1 = \dfrac{T_0}{T_1}\rho_0$ となることから、$M = \rho_0 V\left(1 - \dfrac{T_0}{T_1}\right)$ がわかる。

(3) 外気の密度 ρ' とすると、気球内部の空気の密度は (外気と圧力が等しくなることから)$\dfrac{T_0}{T_2}\rho'$ である。よって、気球が静止するとき気球の密度と大気の密度が一致することから、

$$\frac{\frac{T_0}{T_2}\rho' V + M}{V} = \rho'$$

であり、これに前問の M を代入すれば、$\rho' = \dfrac{1 - T_0/T_1}{1 - T_0/T_2}\rho_0$ である。

(4) 外気の密度は、温度一定であることから、圧力に比例する。よって、求める圧力 P' は

$$P' = \frac{\rho'}{\rho_0}P_0 = \frac{1 - T_0/T_1}{1 - T_0/T_2}P_0$$

である。

(5) 空気を除いた気球全体の質量 M' とする。気球が静止するとき気球の密度と大気の密度が一致することから、今回静止したときの外気の密度は ρ' に等しいことより、

$$\frac{\frac{T_0}{T_1}\rho' + M'}{V} = \rho'$$

である。(3) の ρ' を代入すれば、

$$M' = \frac{(1 - T_0/T_1)^2}{1 - T_0/T_2}\rho_0 V$$

がわかる。

解答

(1) イ　(2) オ　(3) エ　(4) ア　(5) ウ

解説

(1) α 崩壊は He の原子核を放出するので、原子番号が 2、質量数が 4 減る。また、β 崩壊では中性子が陽子に変化するので、原子番号が 1 増える。
以上の事実より、$238-4x=210$ かつ $92-2x+y=84$ であるから、$(x,y)=(7,6)$ である。

(2) Po 原子の質量が $210u$ であるから、1〔mg〕の Po には、$\dfrac{1\times 10^{-6}}{210\times 1.7\times 10^{-27}} \fallingdotseq 2.8\times 10^{18}$ 個の原子が含まれている。半減期ではこの数が半分になり、1 つあたり Q のエネルギーを放出するので、求めるエネルギーは $1.4\times 10^{18}Q$ である。

(3) 崩壊のときに生じたエネルギー Q は崩壊後の原子核と α 粒子の運動エネルギーに変化する。ここで、はじめ Po 原子核は静止していたから、運動量保存則より崩壊後の原子核と α 粒子は同じ運動量を持つ。同じ運動量を持つとき、運動エネルギーは質量に反比例し、崩壊後の原子核の質量は $206u$ であるから、α 粒子の運動エネルギーを K とすれば $\dfrac{2}{103}K$ のエネルギーを持つ。
以上より、$K+\dfrac{2}{103}K=Q$ だから、$K\fallingdotseq 0.98Q$ である。

(4) α 粒子、C 原子核、中性子の運動量の大きさをそれぞれ p_α, p_C, p_n とし、運動エネルギーをそれぞれ E_α, E_C, E_n とする。
運動量保存則より、C 原子核と中性子の運動方向が垂直であったことから、$p_\alpha^2=p_C^2+p_n^2$ である。
これより、

$$E_\alpha=\frac{p_\alpha^2}{2\cdot 4u}=\frac{p_C^2+p_n^2}{8u}=3E_C-\frac{1}{4}E_n$$

がわかる。よって、$Q'=E_C+E_n-E_\alpha$ とより、$Q'=0.75E_n-2.0E_C$ がわかる。

(5) 前問で得た 2 式 $Q'=0.75E_n-2.0E_C$ と $E_\alpha=3E_C+\dfrac{1}{4}E_n$ に $E_\alpha=0.98Q$ を代入して E_C を消去すれば、$E_n=1.1Q'+0.71Q$ が得られる。