解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2020 年度　慶應義塾大学医学部

【　講　評　】

例年通り，大問４題で出題され，ほとんどが空欄補充形式で，１問だけ証明問題が記述式で出題された点も変更はなかった．確率の問題を中心に，全体的な難易度はやや易しくなり，計算量も少なくなったため，例年よりも得点しやすい問題であった．合格のためにはⅠ，Ⅱを確実に得点し，Ⅲ，Ⅳで部分点を重ね，７割以上は得点したい．以下，設問ごとに述べる．

Ⅰ　（1）空間座標の典型問題である．平面の法線ベクトルを利用して手早く処理したい．
（2）面積，体積を求める簡単な問題なので，これも落とせない．
（3）複素数平面上の図形（直線・円）に関する典型問題である．複素数にこだわらず，座標やベクトルを使い分けて，手早く処理したい（別解参照）．

Ⅱ　当校で頻出な確率と漸化式の問題ではなく，標準的な確率の問題であった．複雑な事象でもないので，ある程度の時間をかければ確実に得点できるだろう．数列の和を用いた解法（別解参照）を選択すると計算量が多くなるので注意が必要である．解説に示した解法を用いて効率よく解きたい．

Ⅲ　（あ）～（え）は計算問題であるから落とせない．これらを誘導とみて，（お）が埋められたかどうかがポイントとなる．また，誘導を無視して（お）の漸化式を導くこともできるので（別解参照），力の差が出やすい問題であった．（お）が埋まれば（か），（き）は容易であり，（く）も不等式が与えられているので，簡単にはさみうちできるであろう．

Ⅳ　（１）は放物線に関する面積なので落とせない．（２）は２次関数の最大値に関する典型問題であるが，文字が多く計算が煩雑になる．この設問がクリアーできれば（３），（４）は特に難しい問題ではないだけに，力の差がでる問題であった．ちなみに，（４）は与えられた不等式を用いずにはさみうちすることもできる（別解参照）．当校を志望する者であれば，このような視点も持ち合わせてもらいたい．

【 解 答 】

［Ｉ］空間ベクトル／微分法・積分法（数Ⅲ）／複素数平面（数Ⅲ）【やや易】

(1)　（あ）$-\dfrac{1}{b}$,　（い）$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$

(2)　（う）e^2,　（え）4,　（お）$\dfrac{8}{3}\pi$

(3)　（か）$\dfrac{3}{2}+2i$,　（き）$-\dfrac{3}{2}-2i$,　（く）$\dfrac{5}{2}$,

（け）$\dfrac{-6+8i}{25}$,　（こ）$\dfrac{-7+i}{25}$,　（さ）$\dfrac{1+7i}{25}$

［Ⅱ］確率（数Ａ）【標準】

(1)　（あ）$4(n-1)$,　（い）n^2

(2)　（う）$4(n-2)$,　（え）$n(n-1)$

(3)　（お）$4(n-3)(n-2)(2n-3)$,　（か）$n^2(n-1)^2$

(4)　（き）$2(2n-1)$,　（く）$3n(n-1)$

(5)　（け）$(n-2)(n+1)$,　（こ）$6n(n-1)$

［Ⅲ］微分法・積分法（数Ⅲ）【標準】

(1)　（あ）4,

(2)　（い）2,　（う）10,　（え）42,　（お）$4S_n+2$ など,

（か）$\dfrac{2}{3}(2^n-1)(2^n+1)$,　（き）$\dfrac{1}{3}(2^n-1)(2^{n+1}-1)$,　（く）$\dfrac{\pi^2}{6}$

［Ⅳ］微分法・積分法（数Ⅱ，数Ⅲ）／２次関数（数Ｉ）【標準】

(1)　（あ）$\dfrac{3A}{2\sqrt{c}}$

(2)　（い）$\dfrac{3\sqrt{2}\,A}{2}$,　（う）$\sqrt{c-\dfrac{2c^3}{9A^2}}$,　（え）$\sqrt{c-\dfrac{c^3}{9A^2}}$

(3)　（お）$\sqrt{3}\,A$,　（か）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4)　解説参照

【 解 説 】

［I］

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ a)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 1,\ b)$ である.

$\vec{n}=(a,\ b,\ -1)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{n}=0$ であるから，$\vec{n}$ は平面 α に垂直なベクトルの 1 つである.

平面 α 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{n}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=0$ であるから，

平面 α の方程式は $\quad ax+by-z=0$

これと xy 平面との交線 ℓ は $z=0$ として $\quad ax+by=0 \quad \therefore\ y=-\dfrac{a}{b}x$

交線 ℓ の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，交線 ℓ は $\vec{u}=\left(1,\ -\dfrac{a}{b},\ 0\right)$ に平行な直線である.

$\vec{e}=(0,\ 0,\ 1)$ とすると，$\vec{e}$ は xy 平面に垂直なベクトルを表すから，

$\vec{n}$ と $\vec{e}$ のなす角は，平面 α と xy 平面のなす角 θ または $\pi-\theta$ に等しい.

$$|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+1},\ |\vec{e}|=1,\ \vec{n}\cdot\vec{e}=-1$$

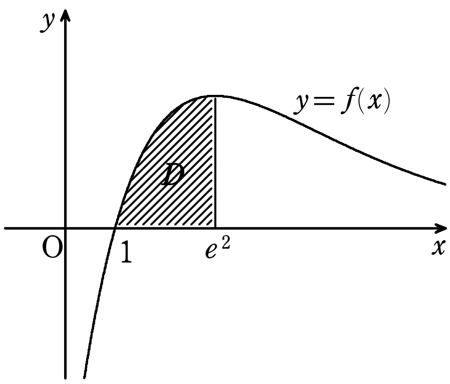
であり，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\geqq0$ であるから，

$$\cos\theta=\left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{e}}{|\vec{n}||\vec{e}|}\right|=\left|\frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right|=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \quad 答$$

(2) $$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\log x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$$

$f(x)$ の $x>0$ における増減は次のようになる.

x	0		e^2	
$f'(x)$	/	+	0	−
$f(x)$	/	↗		↘



よって $f(x)$ は $x=e^2$ において最大値をとる.

また $\quad \displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=0$

したがって $y=f(x)$ のグラフは右上図のようになる.

$1\leqq x\leqq e^2$ のとき $f(x)\geqq0$ であるから図形 D の面積を S とすると

$$S=\int_1^{e^2}\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx=\Big[2\sqrt{x}\log x\Big]_1^{e^e}-2\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=4e-2\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{e^2}=4$$

また，図形 D の体積を V とすると

$$V=\pi\int_1^{e^2}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\pi\int_1^{e^2}\frac{1}{x}(\log x)^2dx=\pi\left[\frac{1}{3}(\log x)^3\right]_1^{e^2}=\frac{8}{3}\pi$$

(3)　$\alpha=a+bi$ とおくと，$\alpha z+\overline{\alpha}\,\overline{z}+1=0$　……①　より

$$(a+bi)(x+yi)+(a-bi)(x-yi)+1=0$$
$$ax-by+(ay+bx)i+ax-by-(ay+bx)i+1=0$$
$$\therefore\ 2ax-2by+1=0$$

これが $3x-4y+1=0$ を表すから　　$2a=3$，$-2b=-4$　　$\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$，$b=2$

よって $\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3}{2}+2i}$

別解　z の実部 x，虚部 y を z，$\overline{z}$ で表して求めることもできる．

$x=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$，$y=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$ を $3x-4y+1=0$ に代入すると

$$\frac{3}{2}(z+\overline{z})-\frac{2}{i}(z-\overline{z})+1=0$$
$$\frac{3}{2}(z+\overline{z})+2i(z-\overline{z})+1=0$$
$$\therefore\ \left(\frac{3}{2}+2i\right)z+\overline{\left(\frac{3}{2}+2i\right)}\,\overline{z}+1=0$$

よって $\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3}{2}+2i}$ である．

$w=\dfrac{1}{z}$ より $z=\dfrac{1}{w}$ $(w\neq 0)$ であるから ① に代入すると

$$\frac{\alpha}{w}+\frac{\overline{\alpha}}{\overline{w}}+1=0$$
$$w\overline{w}+\alpha\overline{w}+\overline{\alpha}w=0$$
$$(w+\alpha)(\overline{w+\alpha})=\alpha\overline{\alpha}$$
$$|w+\alpha|^2=|\alpha|^2\qquad \therefore\ |w-(-\alpha)|=|\alpha|$$

$\alpha=\dfrac{3}{2}+2i$ であるから　$|\alpha|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2}=\dfrac{5}{2}$

よって w は，複素数 $\boldsymbol{-\alpha=-\dfrac{3}{2}-2i}$ を中心とする，半径 $\boldsymbol{|\alpha|=\dfrac{5}{2}}$ の円を表す．

$\mathrm{P}(z)$ が 2 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{B}(\beta)$ を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるとき，$\mathrm{OP}=\mathrm{BP}$ が成り立つから　　$|z|=|z-\beta|$

両辺を 2 乗して整理すると

$$z\overline{z}=(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})$$
$$z\overline{z}=z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+\beta\overline{\beta}$$
$$\therefore\ \overline{\beta}z+\beta\overline{z}-\beta\overline{\beta}=0$$

$\beta\neq 0$ とり $\beta\overline{\beta}=|\beta|^2\neq 0$ であるから　　$-\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\overline{\beta}}\overline{z}+1=0$

これが ① と一致するから　　$-\dfrac{1}{\beta}=\alpha$　　$\therefore\ \beta=-\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{2}{3+4i}=\boldsymbol{\dfrac{-6+8i}{25}}$

また，$z_0=\dfrac{1}{2}\beta=\dfrac{-3+4i}{25}$ であり，

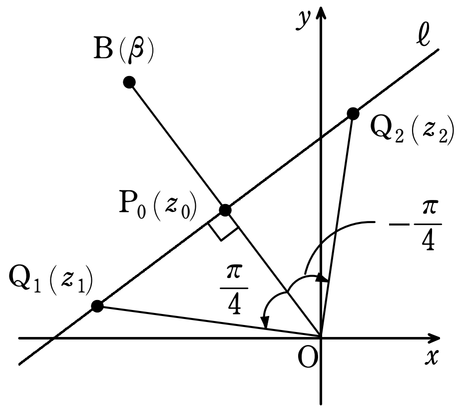
$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$ を $\sqrt{2}$ 倍して $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたもので，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$ を $\sqrt{2}$ 倍して $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたもの

であることから

$$z_1=z_0\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-7+i}{25}$$

$$z_2=z_0\times\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\frac{1+7i}{25}$$



別解　ベクトルを用いても良い．

原点 O から直線 ℓ へ垂線 OH を下す．

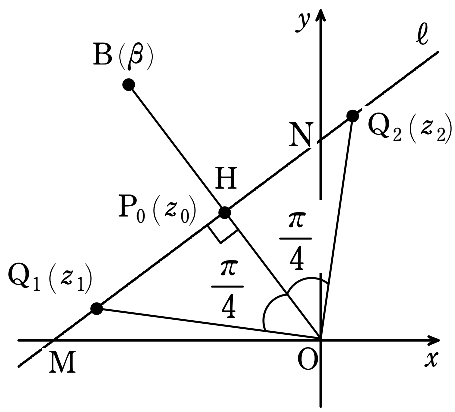
$\mathrm{OM}=\dfrac{1}{3}$，$\mathrm{ON}=\dfrac{1}{4}$ であるから

$\angle\mathrm{NMO}=\phi\ \left(0<\phi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\phi=\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}}=\frac{3}{4}\qquad\therefore\ \sin\phi=\frac{3}{5}$$

直角三角形 OMH に注目すると

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OM}\sin\phi=\frac{1}{5}$$



$\vec{h}=(-3,\ 4)$ は直線 ℓ に垂直なベクトルの 1 つであり $|\vec{h}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\vec{h}=\frac{1}{25}\vec{h}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{25}\vec{h}=\left(-\dfrac{6}{25},\ \dfrac{8}{25}\right)$　　$\therefore\ \beta=\dfrac{-6+8i}{25}$

また，$\vec{l}=(4,\ 3)$ は直線 ℓ の方向ベクトルの 1 つであり $|\vec{l}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$ である．

$\mathrm{P_0}=\mathrm{H}$ であることに注意すると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_1}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_2}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}\right|=\dfrac{1}{5}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_1}}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\vec{l}=\left(-\frac{4}{25},\ -\frac{3}{25}\right),\qquad \overrightarrow{\mathrm{P_0Q_2}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\vec{l}=\left(\frac{4}{25},\ \frac{3}{25}\right)$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_1}}=\left(-\frac{3}{25},\ \frac{4}{25}\right)+\left(-\frac{4}{25},\ -\frac{3}{25}\right)=\left(-\frac{7}{25}.\ \frac{1}{25}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_2}}=\left(-\frac{3}{25},\ \frac{4}{25}\right)+\left(\frac{4}{25},\ \frac{3}{25}\right)=\left(\frac{1}{25},\ \frac{7}{25}\right)$$

したがって　$z_1=\dfrac{-7+i}{25}$，　$z_2=\dfrac{1+7i}{25}$

［Ⅱ］

(1)　$n \geqq 3$ のとき，A 君，B 君が共に番号 1 を引かないのは，各々が番号 2 から番号 n までの $n-1$ 枚のカードから 2 枚を取り出すときであるから，

$$\left(\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)^2=\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}\right\}^2=\left(\frac{n-2}{n}\right)^2$$

これは $n=2$ のときも成り立つ.

よって求める確率は　$1-\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^2=\dfrac{4(n-1)}{n^2}$

(2)　$n \geqq 3$ のとき，共通に引くカードが 1 枚となるのは，番号 1 から番号 n の中から，A 君，B 君がともに引く番号，A 君のみが引く番号，B 君のみが引く番号の 3 つの選び方を考えて

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_{n-1}\mathrm{C}_1\times{}_{n-2}\mathrm{C}_1}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}=\frac{4n(n-1)(n-2)}{n^2(n-1)^2}=\frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

これは $n=2$ のときも成り立つ.

別解

$n \geqq 4$ のとき，A 君と B 君が共通に引くカードが 1 枚だけであることの余事象は

　A 君と B 君が共通に引くカードが 2 枚のときの ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り，

　A 君と B 君が共通のカードを引かないときの ${}_n\mathrm{C}_2\times{}_{n-2}\mathrm{C}_2$ 通り，

であるから，求める確率は

$$1-\frac{{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2\times{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}=1-\frac{2+(n-2)(n-3)}{n(n-1)}=\frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

また $n=2$，3 のときの確率はそれぞれ 0，$\dfrac{2}{3}$ であるから，これは $n=2$，3 のときも成り立つ.

(3)　$n \geqq 4$ のとき，各人のカードの引き方について，

（ア）2 以下を引かない確率は　$\dfrac{{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2}=\dfrac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$

（イ）2 以下を 1 枚以上引く確率は　$1-\dfrac{{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2}=\dfrac{4n-6}{n(n-1)}=\dfrac{2(2n-3)}{n(n-1)}$

2 人がカードを引いたときに，(ア)，(イ) が 1 回ずつ起これればよいから，

$$2!\times\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\times\frac{2(2n-3)}{n(n-1)}=\frac{4(n-3)(n-2)(2n-3)}{n^2(n-1)^2}$$

また，$n=2$，3 のときの確率は 0 であるから，これは $n=2$，3 のときも成り立つ.

(4)　$n \geqq 3$ とする．A 君と B 君の引いた番号の小さい方のカードが一致するとき，引かれる 2 つの番号の選び方を考えると ${}_n\mathrm{C}_2$ 通りである．A 君と B 君の引いた番号の小さい方のカードが一致しないとき，引かれる 3 つの番号を決め，一番大きなもの以外の 2 つを A 君，B 君のどちらが引くかを考えて ${}_n\mathrm{C}_3\times 2$ 通りである.

よって求める確率は　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2+2\cdot{}_n\mathrm{C}_3}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}=\dfrac{2(2n-1)}{3n(n-1)}$

また，$n=2$ のときの確率は 1 であるから，これは $n=2$ のときも成り立つ.

別解　一般項を導いて数列の和で確率を求めることもできる．
番号の大きい方を $k\ (k \geqq 2)$ とすると，番号の小さい方は A 君，B 君共に番号 1 から
番号 $k-1$ 番の $k-1$ 枚から引くから，その確率は

$$\left(\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)^2=\frac{4(k-1)^2}{n^2(n-1)^2}$$

$k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ n$ であるから，求める確率は

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{4(k-1)^2}{n^2(n-1)^2}=\frac{4}{n^2(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{4}{n^2(n-1)^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{2(2n-1)}{3n(n-1)}$$

(5)　$n \geqq 4$ のとき，A 君が引いた小さい方の番号が B 君が引いた大きい方の番号よりも大きいとき，この 4 つの数字を選び，大きい方 2 つを A 君 が引き，小さい方 2 つを B 君が引くと考えればよいから ${}_n\mathrm{C}_4$ 通りである．

A 君が引いた小さい方の番号が B 君が引いた大きい方の番号と等しいとき，3 つの番号を選び，1 番大きなものと 2 番目に大きなものを A 君が引き，2 番目に大きなものと一番小さなものを B 君が引けば良いから ${}_n\mathrm{C}_3$ 通り．

よって求める確率は　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_4+{}_n\mathrm{C}_3}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}=\dfrac{(n-2)(n+1)}{6n(n-1)}$

また，$n=2,\ 3$ のときの確率はそれぞれ $0,\ \dfrac{1}{9}$ であるから，これは $n=2,\ 3$ のときも成り立つ．

別解　一般項を導いて数列の和で確率を求めることもできる．
A 君が引く小さい方の番号を $l\ (l \geqq 2)$ とする．
A 君は大きい方の番号を番号 $l+1$ から番号 n の $n-l$ 枚から引き，B 君は番号 1 から番号 l の l 枚から 2 枚引くので，その確率は

$$\frac{{}_{n-l}\mathrm{C}_1\times{}_l\mathrm{C}_2}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}=\frac{2(n-l)l(l-1)}{n^2(n-1)^2}$$

$l=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$ であるから

$$\sum_{l=2}^{n-1}\frac{2(n-l)l(l-1)}{n^2(n-1)^2}=\frac{2}{n^2(n-1)^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)(l-1)l$$

$$=\frac{2}{n^2(n-1)^2}\sum_{l=2}^{n-1}\{(n+1)-(l+1)\}(l-1)l=\frac{2(n+1)}{n^2(n-1)^2}\sum_{l=2}^{n-1}(l-1)l-\frac{2}{n^2(n-1)^2}\sum_{l=2}^{n-1}(l-1)l(l+1)$$

ここで

$$\sum_{l=2}^{n-1}(l-1)l=\frac{1}{3}\sum_{l=2}^{n-1}\{(l-1)l(l+1)-(l-2)(l-1)l\}=\frac{1}{3}\{(n-2)(n-1)n-0\}=\frac{1}{3}(n-2)(n-1)n$$

$$\sum_{l=2}^{n-1}(l-1)l(l+1)=\frac{1}{4}\sum_{l=2}^{n-1}\{(l-1)l(l+1)(l+2)-(l-2)(l-1)l(l+1)\}$$

$$=\frac{1}{4}\{(n-2)(n-1)n(n+1)-0\}=\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

よって求める確率は

$$\frac{2(n+1)}{n^2(n-1)^2}\cdot\frac{1}{3}(n-2)(n-1)n-\frac{2}{n^2(n-1)^2}\cdot\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)=\frac{(n-2)(n+1)}{6n(n-1)}$$

［Ⅲ］

(1) $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$af(2x)=\dfrac{a}{\sin^2 2x}=\dfrac{a}{(2\sin x\cos x)^2}=\dfrac{a}{4\sin^2 x\cos^2 x}$

$f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=af(2x)$ ……① が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の任意の x で成り立つとき

$\dfrac{a}{4}=1 \qquad \therefore\ a=4$

別解　x に具体的な値を代入して a の値を求めることもできる.

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=4$, $f\left(2\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{4}{3}$

であるから, $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=af(2x)$ において $x=\dfrac{\pi}{3}$ とすると

$\dfrac{4}{3}+4=\dfrac{4}{3}a \qquad \therefore\ a=4$

また $a=4$ のとき，確かに $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=4f(2x)$ は成り立つ.

(2) $S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}f\left(\dfrac{k\pi}{2^2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\mathbf{2}$,

$S_2=\displaystyle\sum_{k=1}^{3}f\left(\dfrac{k\pi}{2^3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+f\left(\dfrac{2}{8}\pi\right)+f\left(\dfrac{3}{8}\pi\right)$

$=f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)$

$=4f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \quad (\because\ ①)$

$=5f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=5\cdot 2=\mathbf{10}$,

$S_3=\displaystyle\sum_{k=1}^{7}f\left(\dfrac{k\pi}{2^4}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{16}\right)+f\left(\dfrac{2\pi}{16}\right)+f\left(\dfrac{3\pi}{16}\right)+f\left(\dfrac{4\pi}{16}\right)+f\left(\dfrac{5\pi}{16}\right)+f\left(\dfrac{6\pi}{16}\right)+f\left(\dfrac{7\pi}{16}\right)$

$=\left\{f\left(\dfrac{\pi}{16}\right)+f\left(\dfrac{7\pi}{16}\right)\right\}+\left\{f\left(\dfrac{2\pi}{16}\right)+f\left(\dfrac{6\pi}{16}\right)\right\}+\left\{f\left(\dfrac{3\pi}{16}\right)+f\left(\dfrac{5\pi}{16}\right)\right\}+f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=4f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+4f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+4f\left(\dfrac{3}{8}\pi\right)+f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=4\left\{f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+f\left(\dfrac{3}{8}\pi\right)\right\}+5f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4\cdot 4f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+5f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=21f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=21\cdot 2=\mathbf{42}$

$$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$=f\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2^{n+2}}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{(2^n-1)\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{2^n\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$+f\left(\frac{(2^n+1)\pi}{2^{n+2}}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{(2^{n+1}-2)\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$=f\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2^{n+2}}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{(2^n-1)\pi}{2^{n+1}}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(2^n-1)\pi}{2^{n+2}}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2^n-1}\left\{f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)\right\}+f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=4\sum_{k=1}^{2^n-1}f\left(2\cdot\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+2 \quad (\because\ ①)$$

$$=4\sum_{k=1}^{2^n-1}f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)+2=4S_n+2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{S_{n+1}=4S_n+2}$$

これを変形すると　$S_{n+1}+\frac{2}{3}=4\left(S_n+\frac{2}{3}\right)$

$\left\{S_n+\frac{2}{3}\right\}$ は等比数列であるから　$S_n+\frac{2}{3}=\left(S_1+\frac{2}{3}\right)\cdot 4^{n-1}=\frac{8}{3}\cdot 4^{n-1}$

よって　$S_n=\frac{2}{3}\cdot 4^n-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(4^n-1)=\boldsymbol{\frac{2}{3}(2^n-1)(2^n+1)}$

また　$g(x)=\frac{1}{\tan^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1=f(x)-1$　であるから，

$$T_n=\sum_{k=1}^{2^n-1}g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)=\sum_{k=1}^{2^n-1}\left\{f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)-1\right\}$$

$$=S_n-(2^n-1)=\frac{2}{3}(2^n-1)(2^n+1)-(2^n-1)=\boldsymbol{\frac{1}{3}(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$$

別解　$\{S_n\}$ の漸化式は次のように導くこともできる．

$$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)=\sum_{k=1}^{2^n}f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)+\sum_{k=1}^{2^n}f\left(\frac{(2k-2)\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2^n}f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)+\sum_{k=1}^{2^n-1}f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)=\sum_{k=1}^{2^n}f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)+S_n$$

であるから，　$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=4f(2x)$ を用いると

$$S_{n+1}-S_n=\sum_{k=1}^{2^n}f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left\{f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)\right\}$$

$$=4\sum_{k=1}^{2^{n-1}}f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}\right)=4(S_n-S_{n-1})$$

$\{S_{n+1}-S_n\}$ は等比数列であり，　$S_2-S_1=8$ であるから

$$S_{n+1}-S_n=8\cdot 4^{n-1}=2\cdot 4^n \qquad \therefore\ S_{n+1}=S_n+2\cdot 4^n$$

別解　T_n は以下のように求めることもできる.

関数 $g(x)$ について次の式が成り立つ.

$$g(x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan^2 x}+\tan^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}-2=4f(2x)-2 \quad \cdots\cdots ②$$

$n\geqq 2$ のとき $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ に注意すると

$$T_n=\sum_{k=1}^{2^n-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$=g\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)+g\left(\frac{2\pi}{2^{n+1}}\right)+\cdots\cdots+g\left(\frac{(2^{n-1}-1)\pi}{2^{n+1}}\right)+g\left(\frac{2^{n-1}\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$+g\left(\frac{(2^{n-1}+1)\pi}{2^{n+1}}\right)+\cdots\cdots+g\left(\frac{(2^n-2)\pi}{2^{n+1}}\right)+g\left(\frac{(2^n-1)\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$=g\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)+g\left(\frac{2\pi}{2^{n+1}}\right)+\cdots\cdots+g\left(\frac{(2^{n-1}-1)\pi}{2^{n+1}}\right)+g\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+g\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(2^{n-1}-1)\pi}{2^{n+1}}\right)+\cdots\cdots+g\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2^{n+1}}\right)+g\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\left\{g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)+g\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)\right\}+g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\left\{4f\left(\frac{k\pi}{2^n}\right)-2\right\}+1 \quad (\because ②)$$

$$=4S_{n-1}-2(2^{n-1}-1)+1=4\cdot\frac{2}{3}(4^{n-1}-1)-2^n+3=\frac{1}{3}(2^n-1)(2^{n+1}-1)$$

$T_1=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ.

$1\leqq k\leqq 2^n-1$ のとき $0<\frac{k\pi}{2^{n+1}}<\frac{2^n\pi}{2^{n+1}}=\frac{\pi}{2}$ であるから $\theta=\frac{k\pi}{2^{n+1}}$ とおくと

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)<\frac{k\pi}{2^{n+1}}<\tan\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$$

各辺正であるから 2 乗して逆数をとると

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)}<\frac{4^{n+1}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2}<\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 2^n-1$ での和をとると　$\frac{\pi^2}{4^{n+1}}T_n<\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi^2}{4^{n+1}}S_n$

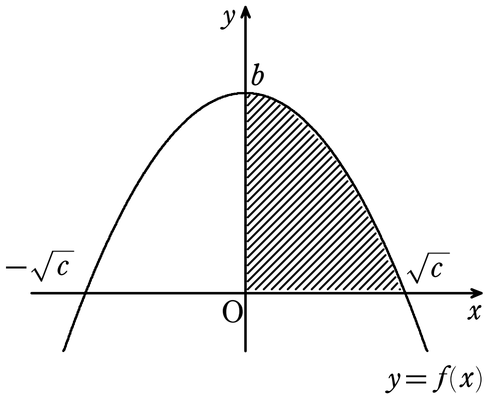
よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{4^{n+1}}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{4^{n+1}}\cdot\frac{2}{3}(2^n-1)(2^n+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{\pi^2}{6}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{4^{n+1}}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{4^{n+1}}\cdot\frac{1}{3}(2^n-1)(2^{n+1}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

したがってはさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

［IV］

(1)　A は図の斜線部分の面積を表すから



$$A=\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} b\left(1-\frac{x^2}{c}\right)dx$$

$$=-\frac{b}{2c}\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}}(x-\sqrt{c})(x+\sqrt{c})dx$$

$$=\frac{b}{2c}\cdot\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{c}+\sqrt{c})^3=\frac{2b\sqrt{c}}{3}$$

よって　　$b=\dfrac{3A}{2\sqrt{c}}$

次に，　$\{r(x)\}^2=x^2+\{f(x)\}^2=x^2+b^2\left(1-\dfrac{x^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{b^2}{c^2}x^4+\left(1-\dfrac{2b^2}{c}\right)x^2+b^2$

$x^2=t$ とおくと $0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ のとき $0\leqq t\leqq c$ であり，$\{r(x)\}^2=g(t)$ とおくと

$$g(t)=\frac{b^2}{c^2}t^2+\left(1-\frac{2b^2}{c}\right)t+b^2=\frac{b^2}{c^2}\left\{t-\left(c-\frac{c^2}{2b^2}\right)\right\}^2-\frac{c^2}{4b^2}+c$$

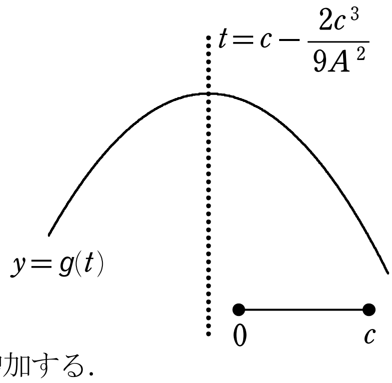
$b=\dfrac{3A}{2\sqrt{c}}$ より　$g(t)=\dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{9A^2}{4c}\left\{t-\left(c-\dfrac{c^2}{2}\cdot\dfrac{4c}{9A^2}\right)\right\}-\dfrac{c^2}{4}\cdot\dfrac{4c}{9A^2}+c$

$$=\frac{9A^2}{4c^3}\left\{t-\left(c-\frac{2c^3}{9A^2}\right)\right\}-\frac{c^3}{9A^2}+c$$

$r(x)>0$ より $r(x)$ と $\{r(x)\}^2=g(t)$ の増減は一致するので，以下 $g(t)$ について考える．

$\dfrac{2c^3}{9A^2}>0$ であるから　　$c-\dfrac{2c^3}{9A^2}<c$

(ⅰ) $c-\dfrac{2c^3}{9A^2}\leqq 0$　……①　のとき



$g(t)$ は $0\leqq t\leqq c$ において増加し，

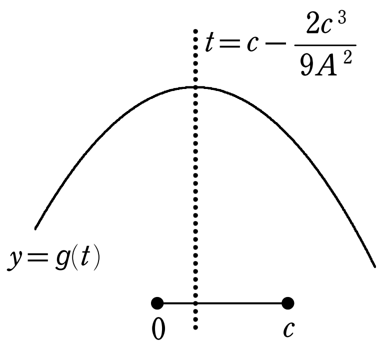
$r(x)$ も $0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ において増加する．

① より　　$c(\sqrt{2}c-3A)(\sqrt{2}c+3A)\geqq 0$

$c>0$ であるから　　$\dfrac{3A}{\sqrt{2}}\leqq c$　　$\therefore$ $\dfrac{3\sqrt{2}A}{2}\leqq c$

よって $c\geqq\dfrac{3\sqrt{2}A}{2}$ のとき，$r(x)$ は $0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ において増加する．

(ⅱ) $0<c-\dfrac{2c^3}{9A^2}$，つまり $0<c<\dfrac{3A}{\sqrt{2}}$ のとき



$g(t)$ は $t=c-\dfrac{2c^3}{9A^2}$ において最大値をとり，

このとき $r(x)$ も最大値をとる．

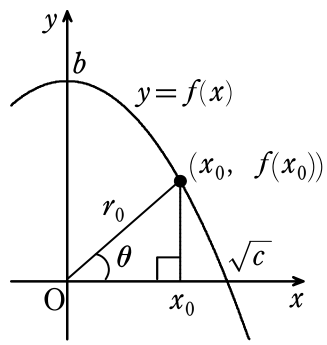
$x=\sqrt{t}$，$r(x)=\sqrt{h(t)}$ であるから

$$x_0=\sqrt{c-\frac{2c^3}{9A^2}},\quad r_0=r(x_0)=\sqrt{c-\frac{c^3}{9A^2}}$$

(3)　$h(c)=c-\dfrac{c^3}{9A^2}$ とおくと　　$h'(c)=\dfrac{(\sqrt{3}\,A-c)(\sqrt{3}\,A+c)}{3A^2}$

$0<c<\dfrac{3\sqrt{2}\,A}{2}$ における $h(c)$ の増減は次のようになる．

c	0		$\sqrt{3}\,A$		$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}A$
$h'(c)$	/	$+$	0	$-$	/
$h(c)$	/	↗		↘	/



よって $r_0=\sqrt{h(c)}$ が最大値をとるのは $c=\sqrt{3}\,A$ である．

このとき　$x_0=\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\,A}{3}}$，$r_0=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}\,A}{3}}$

したがって　　$\cos\theta=\dfrac{x_0}{r_0}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}\,A}}{\sqrt{2\sqrt{3}\,A}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4)　$b=\dfrac{3A}{2\sqrt{c}}$ より　$f'(x)=-\dfrac{2b}{c}x=-\dfrac{2}{c}\cdot\dfrac{3A}{2\sqrt{c}}x=-\dfrac{3A}{c\sqrt{c}}x$

よって　$L(c)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{c}}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^{\sqrt{c}}\sqrt{1+\frac{9A^2}{c^3}x^2}\,dx$

ここで $\dfrac{9A^2}{c^3}x^2\geqq 0$ であるから不等式において $s=1$，$t=\dfrac{9A^2}{c^3}x^2$ とおくと

$$1\leqq\sqrt{1+\frac{9A^2}{c^3}x^2}\leqq 1+\sqrt{\frac{9A^2}{c^3}x^2}=1+\frac{3A}{c\sqrt{c}}x$$

各辺を $0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ で定積分すると　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{c}}1\,dx\leqq L(c)\leqq\int_0^{\sqrt{c}}\left(1+\frac{3A}{c\sqrt{c}}x\right)dx$

$$\Big[x\Big]_0^{\sqrt{c}}\leqq L(c)\leqq\left[x+\frac{3A}{2c\sqrt{c}}x^2\right]_0^{\sqrt{c}}\qquad\therefore\ \sqrt{c}\leqq L(c)\leqq\sqrt{c}+\frac{3A}{2\sqrt{c}}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{c}}>0$ をかけると　　$1\leqq\dfrac{L(c)}{\sqrt{c}}\leqq 1+\dfrac{3A}{2c}$

$\displaystyle\lim_{c\to\infty}\left(1+\frac{3A}{2c}\right)=1$ であるからはさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{c\to\infty}\frac{L(c)}{\sqrt{c}}=1$　■

また不等式において $s=\dfrac{9A^2}{c^3}x^2$，$t=1$ とすると

$$\frac{3A}{c\sqrt{c}}x\leqq\sqrt{\frac{3A^2}{c^3}x^2+1}\leqq\frac{3A}{c\sqrt{c}}x+1$$

各辺を $0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ で定積分すると　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{c}}\frac{3A}{c\sqrt{c}}x\,dx\leqq L(c)\leqq\int_0^{\sqrt{c}}\left(\frac{3A}{c\sqrt{c}}x+1\right)dx$

$$\frac{3A}{2\sqrt{c}}\leqq L(c)\leqq\sqrt{c}+\frac{3A}{2\sqrt{c}}$$

$\sqrt{c}>0$ をかけると　　$\dfrac{3A}{2}\leqq\sqrt{c}\,L(c)\leqq c+\dfrac{3A}{2}$

$\displaystyle\lim_{c\to+0}\frac{3A}{2}=0$ であるから，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{c\to+0}\sqrt{c}\,L(c)=\frac{3A}{2}$　■

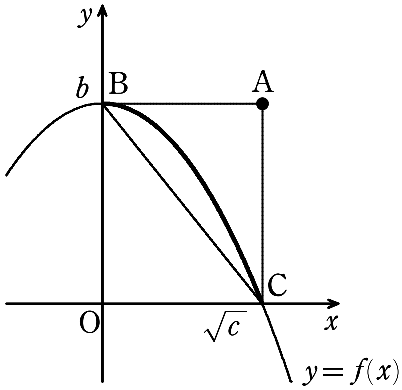
別解　与えられた不等式を用いずに，長さに注目してはさみうちすることもできる．

A$(\sqrt{c},\ b)$，B$(0,\ b)$，C$(\sqrt{c},\ 0)$ とする．

$y=f(x)=b\left(1-\dfrac{x^2}{c}\right)$ は $0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ において

上に凸で単調に減少するから，曲線 $y=f(x)$

$(0\leqq x\leqq\sqrt{c})$ の長さ $L(c)$ について



$$\mathrm{BC}<L(c)<\mathrm{BA}+\mathrm{AC}$$

$$\therefore\ \sqrt{b^2+c}<L(c)<b+\sqrt{c}$$

が成り立つ．

$b=\dfrac{3A}{2\sqrt{c}}$ を代入すると　$\sqrt{\dfrac{9A^2}{4c}+c}<L(c)<\dfrac{3A}{2\sqrt{c}}+\sqrt{c}$　……$(*)$

$(*)$ の各辺に $\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ をかけて　$\sqrt{\dfrac{9A^2}{4c^2}+1}<\dfrac{L(c)}{\sqrt{c}}<\dfrac{3A}{2c}+1$

$\lim\limits_{c\to\infty}\sqrt{\dfrac{9A^2}{4c^2}+1}=\lim\limits_{c\to\infty}\left(\dfrac{3A}{2c}+1\right)=1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{c\to\infty}\frac{L(c)}{\sqrt{c}}=1\quad\blacksquare$$

また $(*)$ の各辺に $\sqrt{c}$ をかけて　$\sqrt{\dfrac{9A^2}{3}+c^2}<\sqrt{c}\,L(c)<\dfrac{3A}{2}+c$

$\lim\limits_{c\to+0}\sqrt{\dfrac{9A^2}{4}+c^2}=\lim\limits_{c\to+0}\left(\dfrac{3A}{2}+c\right)=\dfrac{3A}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{c\to+0}\sqrt{c}\,L(c)=\frac{3A}{2}\quad\blacksquare$$