解答速報 物理

医学部受験専門予備校 慧修会

2021 年度　東海大学　１日目

【 講 評 】

昨年より処理が面倒になっており、やや難化。$\boxed{1}$、$\boxed{3}$を素早く解き、$\boxed{2}$、$\boxed{4}$でなるべく部分点を稼ぎたい。合格点は７割程度か。総じて定性的な議論により簡略化できる部分が多いため、法則や公式を単なる暗記の対象として捉えるのではなく、物理的意味や背景まで拡張して理解しておくとよい。

$\boxed{1}$は正方形物体のモーメントの問題。やや式は煩雑なものの、処理としてはモーメントのつり合い式を解くだけである。特に (3) などは、真面目に計算しようとすると時間がかかってしまうが、解説のように図形的性質から定性的な議論を行えば即座に解答を求めることができる。このような手法も用いつつ、素早く完答したい。

$\boxed{2}$は標準的な誘導起電力の問題。少なくとも (2) までは確実に得点することが必要だろう。(3) 以降については、重力が無視できることに気付くと処理時間自体は殆どなく解答できるはずである。

$\boxed{3}$は典型的なカルノーサイクルの問題。カルノーサイクルの熱効率は有名事実であるため、覚えている受験生もいただろう。ただその値を覚えているだけでなく、その値が温度のみの関数であるという本質が見えていると、難なく解ける問題である。また、ポアソンの法則は頻出ゆえ、慣れておきたい。

$\boxed{4}$は中性子の量子干渉の問題。干渉は頻出であるものの、状況がやや特殊で手間取った受験生も多かっただろう。処理自体は難しくないが、出てくる式がやや煩雑であり近似計算なども要求されているため、効率よくまとめながら計算する能力が問われる。

【 解 答 ・ 解 説 】

$\boxed{1}$

解答

(1) $\dfrac{MgL}{2}(\cos\theta-\sin\theta)$　(2) $\dfrac{Mg(1-\tan\theta)}{2\tan\theta}$　(3) $L\tan\theta$

(4) $mg\Big(\dfrac{x}{L\tan\theta}-1\Big)$　(5) $\dfrac{3\tan\theta\ m+(2\tan\theta-1)M}{2m}\ L$

解説

(1) 物体の密度は一様であるから、その重力 Mg は重心 (正方形の中心)O にすべてかかると思ってよい。頂点 A から O までの距離は $L/\sqrt{2}$ であり、床面と半直線 OA のなす角は $\theta+\dfrac{\pi}{4}$ であるから、求めるモーメントの大きさは

$$Mg\frac{L}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{MgL}{2}(\cos\theta-\sin\theta)$$

である。

(2) 点 B での垂直抗力を右向き R_0、点 A からの垂直抗力を上向き N、摩擦力を左向き f とする。物体が静止していることから、水平方向の力のつり合いが

$$R_0=f$$

と表せる。また、(1) の結果より、モーメントのつり合いは

$$\frac{MgL}{2}(\cos\theta-\sin\theta)=R_0L\sin\theta$$

と表せる。これらを解いて、

$$R_0=f=\frac{Mg(1-\tan\theta)}{2\tan\theta}$$

となる。

(3) 小物体の位置を点 P とする。抗力の大きさが変わらないということは、モーメントのつり合い式に変化がなかったと言うことである。すなわち、小物体の点 A 周りのモーメントが 0 であるということであり、それは点 P が点 A の直上にあるときに他ならない。このとき、$\angle\mathrm{DAP}=\theta$ となることから、$x=L\tan\theta$ である。

(4) 抗力の増分によるモーメントへの寄与は、小物体によるモーメントへの寄与と打ち消し合うので、

$$(R-R_0)L\sin\theta=mg(x-L\sin\theta)\cos\theta$$

となる。これより、

$$R-R_0=mg\Big(\frac{x}{L\tan\theta}-1\Big)$$

である。

(5) $f=R$ が最大摩擦力 $\dfrac{N}{2}=\dfrac{(M+m)g}{2}$ に一致する瞬間まで静止できる。よって、その瞬間の水平方向のつりあい式は、

$$R=f=mg\Big(\frac{x_{max}}{L\tan\theta}-1\Big)=\frac{(M+m)g}{2}$$

であり、最後の等式を整理して、

$$x_{max}=\frac{3\tan\theta\ m+(2\tan\theta-1)M}{2m}\ L$$

を得る。

$\boxed{2}$

解答

(1) $\dfrac{1}{L}\sqrt{\dfrac{MgR}{v_f}}$ (2) $\sqrt{\dfrac{Mgv_f}{R}}$ (3) $-\dfrac{g}{v_f}$

(4) $\dfrac{gL}{v_f}$ (5) $\left(\dfrac{v_0}{v_f}-\dfrac{gL}{2v_f^2}\right)MgL$

解説

(1) 鉛直下向きに一定の速さ v_f で動いているとき、時間 Δt の間の回路を貫く磁束の変化 $\Delta\Phi$ は、一様磁場の磁束密度の大きさ B を用いて $\Delta\Phi = v_f BL\Delta t$ となる。このとき、回路の誘導起電力 V および回路を流れる電流 I は、

$$V = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = v_f BL$$
$$I = \frac{V}{R} = \frac{v_f BL}{R}$$

となることがわかる。また、導線 AB に働く力は上向きに $IBL = v_f(BL)^2/R$ である (導線 CD は磁場外にあるため、磁場による鉛直方向の力はこれだけである)。回路が等速直線運動をしていることから、回路に働く力はつり合っているので、鉛直方向の力のつり合い $v_f(BL)^2/R = Mg$ を解いて、

$$B = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{MgR}{v_f}}$$

を得る。

(2) 前問より、

$$I = \frac{v_f BL}{R} = \sqrt{\frac{Mgv_f}{R}}$$

である。

(3) 回路に加えた力は、重力とちょうどつり合っている。よって、以下の問題では、この力と重力の影響を無視してよい。さて、z 正方向の速度を v とすると、微小時間 Δt の間の z の変分は $\Delta z = v\Delta t$ である。また、このときに磁場から受ける力は、(1) と同様の議論により z 方向に $-v(BL)^2/R$ である。加速度は $\Delta v/\Delta t$ と表せることから、運動方程式は、

$$M\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v(BL)^2}{R} = -\frac{(BL)^2}{R}\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

となる。これに (1) の B を代入すれば、

$$\Delta v = -\frac{g}{v_f}\Delta z$$

を得る。

(4) 初速度 v_0 であり、$\Delta v = -\dfrac{g}{v_f}\Delta z$ であるから、辺 AB の z 座標の関数として、回路の z 正方向の速度は

$$v = v_0 - \frac{g}{v_f}z$$

と表すことができる。$z = L$ で $v \geq 0$ であればよいので、求める条件は、

$$v_0 \geq \frac{gL}{v_f}$$

となる。

(5) 重力の位置エネルギーと力による仕事は無視できることに留意する。すると、変位前後のエネルギー差がジュール熱として放出されることから、求めるジュール熱は、

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}M\left(v_0 - \frac{gL}{v_f}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{v_f} - \frac{gL}{2v_f^2}\right)MgL$$

となる。

$\boxed{3}$

解答

(1) ウ　(2) ア　(3) イ　(4) オ　(5) エ　(6) イ

解説

(1) 単原子分子理想気体のモル定積比熱は $3R/2$ であるから、B における内部エネルギーは $U_{\mathrm{B}} = 3RT_2/2$ であり、C における内部エネルギーは $U_{\mathrm{C}} = 3RT_1/2$ である。断熱変化では熱の出入りがないことから、熱力学第一法則により、した仕事 W と内部エネルギーの変化 $\varDelta U$ には、$W = -\varDelta U$ の関係が成り立つ。これにより、求める仕事は、

$$W_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} = -(U_{\mathrm{C}} - U_{\mathrm{B}}) = \frac{3R(T_2 - T_1)}{2}$$

である。

(2) $\mathrm{B} \to \mathrm{C}$ の仕事と $\mathrm{D} \to \mathrm{A}$ の仕事はちょうど打ち消し合うことから、正味の仕事 W_N は $W_N = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + W_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}}$ と表せる。

また、断熱変化では $TV^{2/3}$ が一定 (ポアソンの法則) という関係が成立することから、$V_{\mathrm{B}}/V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{C}}/V_{\mathrm{D}}$ が成立する。以上より、

$$W_N = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + W_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} = RT_2 \log\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}} - RT_1 \log\frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{D}}} = R(T_2 - T_1)\log\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}$$

を得る。

(3) サイクルのうち、熱を吸収する過程は $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ のみであり、等温変化であることからした仕事と吸収した熱量が一致するため、

$$Q^{in}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = RT_2 \log\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}$$

である。よって、熱効率 η は、

$$\eta = \frac{W_N}{Q^{in}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

なることがわかる。

(4) 問題文より、$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B'}} = 2W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ である。これより、

$$RT_2 \log\frac{V_{\mathrm{B'}}}{V_{\mathrm{A}}} = 2RT_2 \log\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}$$

だから、

$$V_{B'} = \frac{V_{\mathrm{B}}^2}{V_{\mathrm{A}}}$$

である。

(5) ボイルの法則より、

$$P_{\mathrm{B'}} = P_{\mathrm{A}}\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B'}}} = P_{\mathrm{A}}\left(\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}\right)^2$$

を得る。

(6) η が T_1 および T_2 のみの関数であることと、新たなサイクルの熱効率が η と一致していることから、$T_{\mathrm{C'}} = T_1$ がわかる。これとポアソンの法則より、

$$V_{\mathrm{C'}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} V_{\mathrm{B'}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \frac{V_{\mathrm{B}}^2}{V_{\mathrm{A}}}$$

を得る。

4

解答

(1) エ　(2) カ　(3) イ　(4) ア　(5) ウ

解説

(1) ひし形の面積は $2ab$ であり、一辺の長さは $\sqrt{a^2+b^2}$ であるから、各辺を底辺と見たときの高さは $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。よって、一辺を中心に角度 ϕ だけ回転させたときの高さ H は、

$$H=\frac{2ab\sin\phi}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

と表せる。

(2) 中性子の物質波の波長 λ は、中性子の速さ v を用いて $\lambda=h/mv$ と表せることから、中性子のエネルギー E は λ を用いて $E=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{h^2}{2m\lambda^2}$ と表せる。よって、エネルギー保存則より、検出器に入射する中性子の物質波の波長を λ とするとき、

$$\frac{h^2}{2m\lambda^2}+mgH=\frac{h^2}{2m\lambda_0^2}$$

となる。これに前問の H を代入すれば、

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\dfrac{4m^2gab\lambda_0^2\sin\phi}{h^2\sqrt{a^2+b^2}}}}$$

(3) 位相差は、高さ 0 の経路と高さ H の経路の間で生じる位相差に一致する。それぞれの経路の長さは $\sqrt{a^2+b^2}$ であるから、求める位相差の絶対値は、

$$2\pi\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda_0}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)=\frac{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda_0}\left(1-\sqrt{1-\frac{4m^2gab\lambda_0^2\sin\phi}{h^2\sqrt{a^2+b^2}}}\right)$$

である。ここで、$|x|\ll 1$ のとき、$\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}$ であるから、求める位相差は、

$$\frac{4\pi m^2gab\lambda_0\sin\phi}{h^2}$$

である。

(4) 位相差の絶対値が π のとき初めて強さは最小値を取るので、$4\pi m^2gab\lambda_0\sin\phi_1/h^2=\pi/2$ である。これより、

$$\sin\phi_1=\frac{h^2}{4m^2gab\lambda_0}$$

を得る。

(5) 最大値を取るのは、位相差の絶対値が $2\pi n$ $(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ のときである。$\phi\in[0,\pi/2]$ より、位相差の絶対値の最大値は $4\pi m^2gab\lambda_0/h^2$ であるから、とり得る n の数を求めることで、最大値を取る回数は

$$\left\lfloor\frac{2m^2gab\lambda_0}{h^2}\right\rfloor+1$$

であるとわかる。