解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2021 年度　東京慈恵会医科大学

【　講　評　】

昨年度と同様の形で出題された．以下，大問ごとに述べる．

1．確率［数学 A］（やや易）

玉の取り出し方に関する典型的な問題である．試行の回数も少なく単純であるため，この問題は落とせない．

2．微分法・積分法［数学Ⅲ］（標準）

(1) は y 軸回転体に関する易しい問題であるため，確実に得点する必要がある．(2) は面積を表す定積分が計算できないので，はさみうちの原理により極限を求める．比較的簡単な不等式ではさむことができるので，完答したい問題である．

3．三角関数［数学Ⅱ］／整数の性質［数学 A］（やや難）

(1) は三角関数の定義がしっかりと身についていれば，単位円を用いて容易に解くことができる．他の解法で解くこともできるが，計算が煩雑になり答えまでたどりつけなかった人も多いだろう．(2) は余りに関する有名な証明問題で，解いた経験がある人は解答しやすかっただろう．今回の試験では一番難易度が高く，実力差があらわれやすい問題である．

4．数列の極限［数学Ⅲ］（標準）

図形の面積に関する無限級数の典型問題であった．帰納的に作られる四角形が正方形であることを示し，面積がなす等比数列の初項と公比が求まれば，答えを求めることができる．　記述で減点される部分はあるかもしれないが，答えの値は出したい問題である．

頻出分野である確率，微分法・積分法［数Ⅲ］，整数の性質から出題されたため，焦らずに取り組めた人が多いだろう．ただ，総合的な難易度は高いので，全体で 6 割程度の得点を目指したい．

【　解　答　】

1．ア：$\dfrac{8}{81}$，　　イ：$\dfrac{61}{243}$

2．(1)　$\pi e^{a^2}(a^2-1)$，　　(2)　1

3．(1)　解説参照，　　(2)　解説参照

4．$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

【　解　説　】

［１］

１個のさいころを投げる操作において，４以下の目が出る事象を A，５以上の目が出る事象を B とすると，各事象が起こる確率は

$$P(\mathrm{A})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\quad P(\mathrm{B})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

である．

（ア）A が起こると１個，B が起こると２個玉を並べるから，操作を５回行って並べられた玉の個数が７となるのは，A が３回，B が２回起こるときのみである．このとき，左から３番目の玉が赤玉となるのは，次の２つの場合である．

（ⅰ）　最初の２回で A が起こり，３回目に B が起こる

（ⅱ）　最初に B が２回起こる

（ⅰ）の起こる確率は　$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3^5}$

（ⅱ）の起こる確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{3^5}$

（ⅰ），（ⅱ）より，求める確率は　$\frac{16}{3^5}+\frac{8}{3^5}=\frac{8}{81}$

$\boxed{\text{別解}}$　（ⅰ），（ⅱ）をまとめて計算することもできる．

（ⅰ），（ⅱ）をまとめると，A が３回，B が２回起こるときで，１つの赤玉が左から３番目，もう１つの赤玉が１番目または５番目または６番目に並ぶときである．よって確率は

$$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{81}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

（イ）　左から５番目の玉が赤玉となるのは，次の３通りである．

（ⅰ）　最初の４回で A が起こり，５回目に B が起こる

（ⅱ）　最初の３回で A が２回，B が１回起こり，４回目に B が起こる

（ⅲ）　最初の２回で B が起こり，３回目に B が起こる

（ⅰ）の起こる確率は　$\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3^5}$

（ⅱ）の起こる確率は　${}_3\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 1=\frac{36}{3^5}$

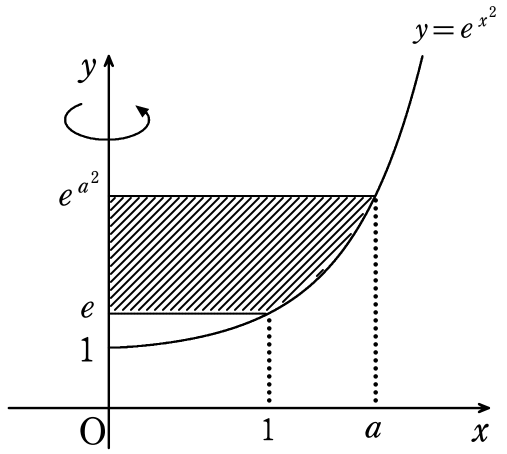
（ⅲ）の起こる確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot 1^2=\frac{9}{3^5}$

（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）より，求める確率は　$\frac{16+36+9}{3^5}=\frac{61}{243}$

［2］

(1)　$y=e^{x^2}$ より　　$x^2=\log y$

求める体積 V は，右図の斜線部分を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積であるから



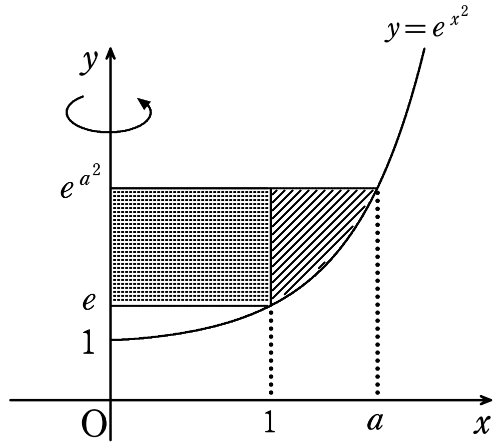
$$V=\int_e^{e^{a^2}}\pi x^2\,dy=\pi\int_e^{e^{a^2}}\log y\,dy$$

$$=\pi\Big[y\log y-y\Big]_e^{e^{a^2}}$$

$$=\boldsymbol{\pi e^{a^2}(a^2-1)}$$

$\boxed{\text{別解}}$　y 軸まわりの回転体の体積なので，バームクーヘン分割を用いてもよい．

右図の網目部分を y 軸のまわりに回転させた図形は円柱であるから，これと斜線部分を回転させた図形の体積を考えて，



$$V=\pi\cdot1^2\cdot\left(e^{a^2}-e\right)+\int_1^a 2\pi x\left(e^{a^2}-e^{x^2}\right)dx$$

$$=\pi\left(e^{a^2}-e\right)+2\pi e^{a^2}\int_1^a x\,dx-\pi\int_1^a 2x\cdot e^{x^2}\,dx$$

$$=\pi\left(e^{a^2}-1\right)+2\pi e^{a^2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^a-\pi\left[e^{x^2}\right]_1^a$$

$$=\boldsymbol{\pi e^{a^2}(a^2-1)}$$

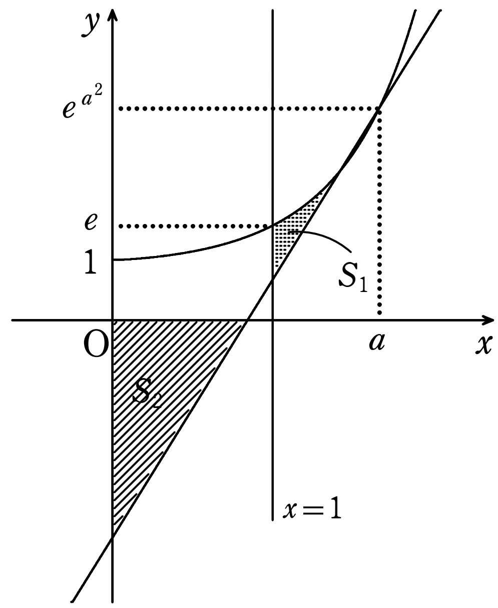
$\boxed{\text{別解}}$終わり

(2)　$y=e^{x^2}$ より　　$y'=2xe^{x^2}$

$\left(a,\ e^{a^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y=2ae^{a^2}(x-a)+e^{a^2}$$

$$\therefore\quad y=2ae^{a^2}x-e^{a^2}(2a^2-1)\quad\cdots\cdots①$$



よって

$$S_1=\int_1^a\left\{e^{x^2}-2ae^{a^2}x+e^{a^2}(2a^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_1^a e^{x^2}\,dx+e^{a^2}\Big[-ax^2+(2a^2-1)x\Big]_1^a$$

$$=\int_1^a e^{x^2}\,dx+e^{a^2}(a^3-2a^2+1)$$

また，① において

$x=0$ のとき　　$y=-e^{a^2}(2a^2-1)<0$　（∵　$a>1$）

$y=0$ のとき　　$x=\dfrac{2a^2-1}{2a}>0$　（∵　$a>1$）

であるから

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot e^{a^2}(2a^2-1)\cdot\frac{2a^2-1}{2a}=\frac{e^{a^2}(2a^2-1)^2}{4a}$$

したがって

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4a}{e^{a^2}(2a^2-1)^2}\left\{\int_1^a e^{x^2}dx+e^{a^2}(a^3-2a^2+1)\right\}$$

$$=\frac{4a\int_1^a e^{x^2}dx}{e^{a^2}(2a^2-1)^2}+\frac{4a(a^3-2a^2+1)}{(2a^2-1)^2}$$

ここで $1\leqq x\leqq a$ のとき，$0<e^{x^2}\leqq e^{a^2}$ が成り立つから，各辺を $1\leqq x\leqq a$ で定積分すると，
等号は明らかに成り立たず，

$$0<\int_1^a e^{x^2}dx<\int_1^a e^{a^2}dx=e^{a^2}(a-1)$$

各辺に $\dfrac{4a}{e^{a^2}(2a^2-1)^2}$ をかけると　　$0<\dfrac{4a\int_1^a e^{x^2}dx}{e^{a^2}(2a^2-1)^2}<\dfrac{4a(a-1)}{(2a^2-1)^2}$

よって　$\dfrac{4a(a^3-2a^2+1)}{(2a^2-1)^2}<\dfrac{S_1}{S_2}<\dfrac{4a(a-1)}{(2a^2-1)^2}+\dfrac{4a(a^3-2a^2+1)}{(2a^2-1)^2}$　が成り立つ．

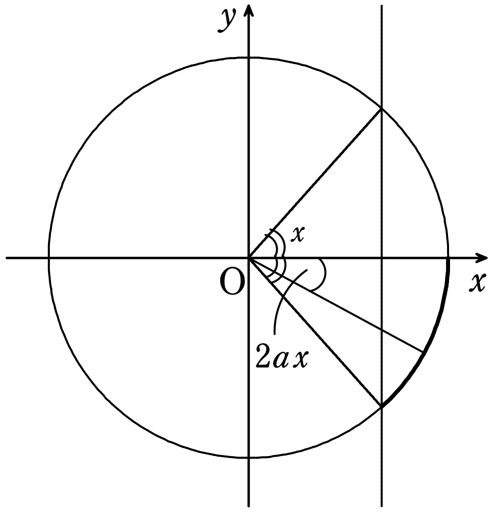
このとき　　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{4a(a^3-2a^2+1)}{(2a^2-1)^2}=\lim_{a\to\infty}\frac{4\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^3}\right)}{\left(2-\frac{1}{a^2}\right)^2}=\frac{4}{2^2}=1$

また　　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{4a(a-1)}{(2a^2-1)^2}=\lim_{a\to\infty}\frac{4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\right)}{\left(2-\frac{1}{a^2}\right)^2}=0$

したがって，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=1$

［３］

(1)　$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$\cos x$ は常に減少関数であり，かつ $\sin 2ax\leqq 0$ のとき，$\cos 2ax$ は増加関数であることから，連立不等式 $\begin{cases}\cos x\leqq\cos 2ax\\ \sin 2ax\leqq 0\end{cases}$ を満たす $2ax$ の範囲は，$l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ a$ とすると



$$-x+2l\pi\leqq 2ax\leqq 2l\pi$$

$$\therefore\quad \frac{2l}{2a+1}\pi\leqq x\leqq\frac{l}{a}\pi\quad\cdots\cdots①$$

と表せる．

$$\frac{2(l+1)}{2a+1}-\frac{l}{a}=\frac{2a-l}{a(2a+1)}>0$$

であるから，$l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ a$ のとき，① は互いに共通部分を持たない a 個の閉区間を表すから $n=a$ である．

閉区間 ① の長さは $\dfrac{l}{a}\pi-\dfrac{2l}{2a+1}\pi=\dfrac{l}{a(2a+1)}\pi$ であり，これは l に関する増加数列であるから，

小さい方から順に

$$x_k=\frac{k}{a(2a+1)}\pi\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ a)$$

よって　$\theta_k=2b(2a+1)\cdot\dfrac{k\pi}{a(2a+1)}=2k\pi\cdot\dfrac{b}{a}$　■

$\boxed{\text{別解}}$　和積変換を用いて不等式を解くこともできる．

$\cos 2ax\leqq\cos x$ より　$\cos 2ax-\cos x\leqq 0$

和積変換により　$-2\sin\dfrac{(2a+1)x}{2}\sin\dfrac{(2a-1)x}{2}\leqq 0$

よって　$\sin\dfrac{(2a+1)x}{2}\sin\dfrac{(2a-1)x}{2}\leqq 0 \iff \begin{cases}\sin\dfrac{(2a+1)x}{2}\geqq 0\\ \sin\dfrac{(2a-1)x}{2}\leqq 0\end{cases}$ または $\begin{cases}\sin\dfrac{(2a+1)x}{2}\leqq 0\\ \sin\dfrac{(2a-1)x}{2}\geqq 0\end{cases}$

k を整数とすると

$$\begin{cases}2k\pi\leqq\dfrac{(2a+1)x}{2}\leqq(2k+1)\pi\\ (2k-1)\pi\leqq\dfrac{(2a-1)x}{2}\leqq 2k\pi\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}(2k+1)\pi\leqq\dfrac{(2a+1)x}{2}\leqq(2k+2)\pi\\ 2k\pi\leqq\dfrac{(2a-1)x}{2}\leqq(2k+1)\pi\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\dfrac{4k\pi}{2a+1}\leqq x\leqq\dfrac{(4k+2)\pi}{2a+1}\\ \dfrac{(4k-2)\pi}{2a-1}\leqq x\leqq\dfrac{4k\pi}{2a-1}\end{cases}\ \cdots\cdots\cdots①\quad\text{または}\quad\begin{cases}\dfrac{(4k+2)\pi}{2a+1}\leqq x\leqq\dfrac{(4k+4)\pi}{2a+1}\\ \dfrac{4k\pi}{2a-1}\leqq x\leqq\dfrac{(4k+2)\pi}{2a-1}\end{cases}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで $\dfrac{4k-2}{2a-1}<\dfrac{4k}{2a+1}<\dfrac{4k}{2a-1}<\dfrac{4k+2}{2a+1}$ が成り立つから，① を満たすのは

$$\frac{4k\pi}{2a+1}\leqq x\leqq\frac{4k\pi}{2a-1}\quad\cdots\cdots\cdots③$$

また $\dfrac{4k}{2a-1}<\dfrac{4k+2}{2a+1}<\dfrac{4k+2}{2a-1}<\dfrac{4k+4}{2a+1}$ が成り立つから，② を満たすのは

$$\frac{(4k+2)\pi}{2a+1}\leqq x\leqq\frac{(4k+2)\pi}{2a-1}\quad\cdots\cdots④$$

$0\leqq x\leqq\pi$ であるから，③，④ をまとめると $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ a$ のとき

$$\frac{2k\pi}{2a+1}\leqq x\leqq\frac{2k\pi}{2a-1}\quad\cdots\cdots⑤$$

また $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ a$ のとき

$$\sin 2ax\leqq 0 \iff (2k-1)\pi\leqq 2ax\leqq 2k\pi$$

$$\iff \frac{(2k-1)\pi}{2a}\leqq x\leqq\frac{k}{a}\pi\quad\cdots\cdots⑥$$

⑤，⑥ の共通部分をとると　$\dfrac{2k\pi}{2a+1}\leqq x\leqq\dfrac{k}{a}\pi$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ a)$

これは互いに共通部分を持たない a 個の閉区間を表すから，$n=a$ である．

以下，本解答同様．

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(2)　kb を a で割ったときの商が q_k，余りが r_k であるから，次の式が成り立つ．

$$kb=a\cdot q_k+r_k$$

「$1\leqq i<j\leqq a$ を満たす任意の自然数 i，j に対し $r_i\neq r_j$ が成り立つ」という命題を (A) とする．

$1\leqq i<j\leqq a$ を満たす自然数 i，j が存在し，$r_i=r_j$ が成り立つと仮定すると

$$ib=a\cdot q_i+r_i,\quad jb=a\cdot q_j+r_i$$

2 式の差をとると　$b(j-i)=a(q_j-q_i)$

右辺は a の倍数であるから，$b(j-i)$ も a の倍数となるが，a と b は互いに素で $a\geqq 2$ であることと，$1\leqq i<j\leqq a$ より $0<j-i<a$ であることから矛盾する．

よって，(A) は成り立つ．　■

$\mathrm{Z}_k\,(\cos\theta_k,\ \sin\theta_k)$ と表され，θ_k について

$$\theta_k=2k\pi\cdot\frac{b}{a}=2\pi\cdot\frac{kb}{a}=2\pi\left(q_k+\frac{r_k}{a}\right)=2\pi q_k+\frac{2r_k}{a}\pi$$

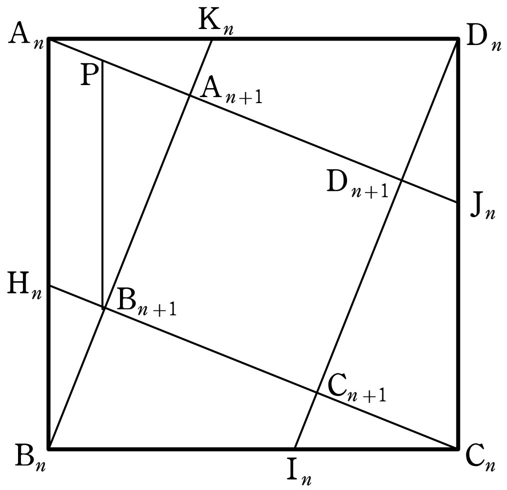
ここで，a で割ったときの余りは $0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ a-1$ のいずれかであり，(A) より，$r_k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ a)$ は全て異なる値であることから，鳩ノ巣原理により，$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots\cdots,\ r_a$ は a 個の値 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ a-1$ を 1 つずつとる．

また，$2\pi q_k$ は 2π の整数倍を表すから，動径 OZ_k が x 軸正の部分となす角を小さい順に並べると

$$0,\ \frac{2}{a}\pi,\ \frac{4}{a}\pi,\ \cdots\cdots,\ \frac{2(a-1)}{a}\pi\ (<2\pi)$$

となる．これらは 2π を a 等分するものであるから，点 $\mathrm{Z}_k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ a)$ は単位円を a 等分する点である．　■

［4］



四角形 $A_1B_1C_1D_1$ は正方形である.

四角形 $A_nB_nC_nD_n$ が正方形であると仮定すると，

$A_nK_n=B_nH_n$ であることから

$$\triangle A_nB_nK_n\equiv\triangle B_nC_nH_n$$

よって $\angle A_nB_nK_n=\angle B_nC_nH_n=\theta$ とおける.

このとき， $\angle C_nB_nB_{n+1}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ であるから,

$$\angle C_nB_{n+1}K_n=\angle B_nC_nH_n+\angle C_nB_nB_{n+1}$$
$$=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$$

同様に $\angle D_nC_{n+1}H_n=\angle A_nD_{n+1}I_n=\angle B_nA_{n+1}J_n=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ.

また， $\triangle A_nA_{n+1}K_n\equiv\triangle B_nB_{n+1}H_n\equiv\triangle C_nC_{n+1}I_n\equiv\triangle D_nD_{n+1}J_n$ より，

$$A_{n+1}B_{n+1}=B_{n+1}C_{n+1}=C_{n+1}D_{n+1}=D_{n+1}A_{n+1}$$

が成り立つから，四角形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ は正方形である.

したがって，任意の自然数 n について，帰納的に四角形 $A_nB_nC_nD_n$ は正方形となる.

正方形 $A_nB_nC_nD_n$ の１辺の長さを x_n とおく.

B_{n+1} を通り， A_nB_n に平行な直線と，辺 A_nJ_n の交点を P とすると　　$PB_{n+1}=A_nH_n=tx_n$

また，$\triangle A_nB_nK_n\backsim\triangle A_{n+1}B_nA_n\backsim\triangle A_{n+1}B_nA_n$ であるから

$$A_{n+1}B_{n+1}:PB_{n+1}=A_nB_n:K_nB_n=x_n:\sqrt{t^2-2t+2}\,x_n=1:\sqrt{t^2-2t+2}$$

よって　　$A_{n+1}B_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-2t+2}}PB_{n+1}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}x_n$

正方形 $A_nB_nC_nD_n$ と正方形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ の相似比は，$\triangle A_nA_{n+1}K_n$ と $\triangle A_{n+1}A_{n+2}K_{n+1}$ の相似比に等しいから， $\triangle A_nA_{n+1}K_n$ の面積 a_n について，次の式が成り立つ.

$$a_{n+1}=\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right)^2{x_n}^2=\frac{t^2}{t^2-2t+2}a_n$$

また， $x_1=1$ より $A_1A_2=\dfrac{1-t}{\sqrt{t^2-2t+2}}$， $A_2K_1=\dfrac{(1-t)^2}{\sqrt{t^2-2t+2}}$ であるから

$$a_1=\frac{1}{2}\cdot A_1A_2\cdot A_2K_1=\frac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}$$

$0<t<1$ のとき $(t^2-2t+2)-t^2=2(1-t)>0$ であるから

$$0<t^2<t^2-2t+2\qquad\therefore\quad 0<\frac{t^2}{t^2-2t+2}<1$$

よって　　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-\left(\dfrac{t^2}{t^2-2t+2}\right)}=\frac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}\cdot\frac{t^2-2t+2}{-2t+2}=\frac{(1-t)^2}{4}$

これが $\dfrac{1}{8}$ となるとき　　$\dfrac{(1-t)^2}{2}=\dfrac{1}{4}$

$0<t<1$ より $1-t>0$ であるから　　$1-t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　$\therefore\quad t=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\text{別解1}}$　正方形の相似比は，三角比を用いて調べてもよい．

$\angle \mathrm{A}_n\mathrm{K}_n\mathrm{A}_{n+1}=\theta$ とおくと　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-2t+2}}$，　$\cos\theta=\dfrac{1-t}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

正方形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の１辺の長さを x_n とすると，$\angle \mathrm{B}_n\mathrm{H}_n\mathrm{B}_{n+1}=\theta$ であるから

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}=\mathrm{B}_n\mathrm{K}_n-\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}-\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{K}_n\\&=\sqrt{t^2-2t+2}\,x_n-\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n\sin\theta-\mathrm{A}_n\mathrm{K}_n\cos\theta\\&=\sqrt{t^2-2t+2}\,x_n-\frac{(1-t)x_n}{\sqrt{t^2-2t+2}}-\frac{(1-t)^2}{\sqrt{t^2-2t+2}}x_n\\&=\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}x_n\end{aligned}$$

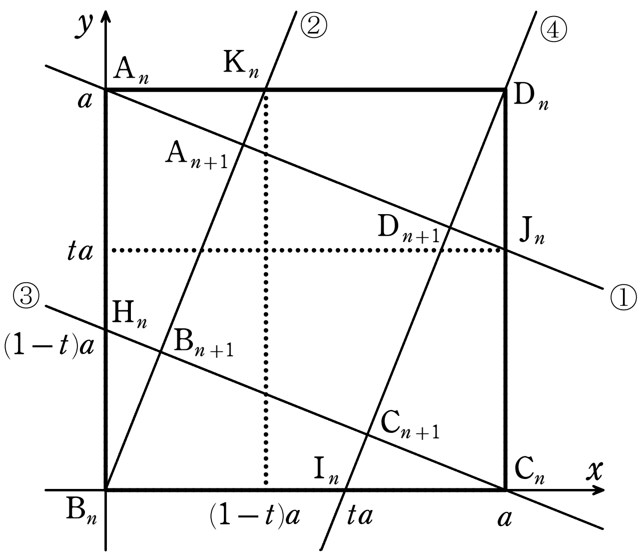
以下，本解答同様．

$\boxed{\text{別解1}}$終わり

$\boxed{\text{別解2}}$　正方形の相似比は，座標を用いて調べてもよい．計算は面倒であるが，図形的な思考は不要となる．

四角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$ は正方形である．

四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ が正方形であると仮定し，$\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\right|=a$ とすると



$\mathrm{A}_n(0,\ a)$，　$\mathrm{B}_n\,(0,\ 0)$，　$\mathrm{C}_n(a,\ 0)$，　$\mathrm{D}_n(a,\ a)$ と座標設定でき，

　$\mathrm{H}_n(0,\ (1-t)a)$，　$\mathrm{I}\,(ta,\ 0)$，　$\mathrm{J}_n(1,\ at)$，　$\mathrm{K}_n((1-t)a,\ 1)$

となる．このとき，直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$，　$\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$，　$\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}$，　$\mathrm{D}_n\mathrm{D}_{n+1}$ の方程式はそれぞれ

$y=-(1-t)x+a$　……①

$y=\dfrac{1}{1-t}x$　……②

$y=-(1-t)x+(1-t)a$　………③

$y=\dfrac{1}{1-t}(x-ta)$　……④

と表せる．

直線 ② と直線 ③ は垂直であり，

直線 ① は直線 ③ を y 軸方向に ta だけ平行移動したもの，

直線 ④ は直線 ② を x 軸方向に ta だけ平行移動したもの

であるから，これらの交点で作られる四角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ は正方形となる.

よって，任意の自然数 n について，帰納的に四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ は正方形となる.

①，② を連立させると　$\left(1-t+\dfrac{1}{1-t}\right)x=a$　　$\therefore\quad x=\dfrac{(1-t)a}{t^2-2t+2}$

② に代入すると $y=\dfrac{a}{t^2-2t+2}$ であるから　$\mathrm{A}_{n+1}\left(\dfrac{(1-t)a}{t^2-2t+2},\ \dfrac{a}{t^2-2t+2}\right)$

②，③ を連立させると　$\left(1-t+\dfrac{1}{1-t}\right)x=(1-t)a$　　$\therefore\quad x=\dfrac{(1-t)^2a}{t^2-2t+2}$

② に代入すると $y=\dfrac{(1-t)a}{t^2-2t+2}$ であるから　$\mathrm{B}_{n+1}\left(\dfrac{(1-t)^2a}{t^2-2t+2},\ \dfrac{(1-t)a}{t^2-2t+2}\right)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}}=\dfrac{1}{t^2-2t+2}(t(1-t)a,\ ta)=\dfrac{ta}{t^2-2t+2}(1-t,\ 1)$

であるから　$\left|\overrightarrow{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}}\right|=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}a=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\left|\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n}\right|$

正方形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ と正方形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ の相似比は，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{K}_n$ と $\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}\mathrm{K}_{n+1}$ の相似比に等しいから，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{K}_n$ の面積 a_n について

$$a_{n+1}=\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right)^2a_n=\frac{t^2}{t^2-2t+2}a_n$$

が成り立つ．また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}\right|=1$ より $\mathrm{A}_2\left(\dfrac{1-t}{t^2-2t+2},\ \dfrac{1}{t^2-2t+2}\right)$，$\mathrm{K}_1(1-t,\ 1)$ であるから

$$a_1=\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\left(1-\frac{1}{t^2-2t+2}\right)=\frac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}$$

以下，本解答同様.

$\boxed{\text{別解２}}$終わり