解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2021年度　順天堂大学

【　講　評　】

例年通りの形式で出題された．第1問の小問集合は，昨年度の3題から4題に変更となったが，全体的な分量は昨年同程度である．1次試験突破のためには，7割～7割5分の得点をしたい．

Ⅰ（1）複素数平面の回転，軌跡に関する基本問題であった．計算量も多くないので，確実に得点したい．

（2）3次関数と直線で囲まれた部分の面積に関する問題であった．3次関数のグラフが変曲点に関して対称であることに注目して，問題文に与えられた定積分を活用することができるかがポイントとなる．差がつく問題であろう．

（3）データの分析の平均，分散に関する典型問題であった．ここは確実に得点したい．

（4）独立2変数関数の最大・最小値を，予選決勝法（1文字だけを変数扱い）や，線形計画法により求める問題であった．類題を解いた経験の有無で，大きく出来が分かれる問題である．

Ⅱ 正五角形および正二十面体に関する問題であった．素直に誘導にしたがっていけば，解答しやすい問題である．また，2016年度に出題された問題とかなり似た問題であったため，過去問で対策していた人は解きやすく感じたであろう．

Ⅲ 例年通り証明問題が出題された．今年度は整数に関するものであったが，$n_p(x-y)$ や $d_p(x,y)$ が表すものが解釈できていれば，標準的な難易度のものである．試験時間との兼ね合いにはなるが，(2) までは得点したい問題である．

【　解　答　】

Ⅰ 小問集合【標準】

(1) ア：5,　イ：2,　ウ：4,　エ：5,　オ：9,　カ：5,　キ：3,　ク：5,　ケ：−,　コ：9,
サ：5,　シ：3,　ス：5,　セ：3,　ソ：3,　タ：5,　チ：1,　ツ：2,　テ：5

(2) ア：−,　イ：1,　ウ：4,　エ：4,　オ：2,　カ：2,　キ：5,　ク：4,　ケ：2,　コ：1

(3) ア：7,　イ：4,　ウ：5,　エ：−,　オ：1,　カ：4,　キ：1,　ク：0,　ケ：0,　コ：1,
サ：4,　シ：8,

(4) ア：2,　イ：3,　ウ：−,　エ：9,　オ：8,　カ：3,　キ：9,　ク：−,　ケ：6,
コ：5,　サ：1,　シ：6,

Ⅱ 図形と計量（数学Ⅰ）／平面図形（数学A）【標準】

ア：1,　イ：5,　ウ：2,　エ：5,　オ：5,　カ：8,　キ：5,　ク：5,　ケ：1,　コ：0,
サ：2,　シ：5,　ス：1,　セ：0,　ソ：5,　タ：1,　チ：6,　ツ：5,　テ：5,　ト：1,
ナ：0,　ニ：2,　ヌ：5,　ネ：5,　ノ：5,　ハ：5,　ヒ：8

Ⅲ 整数の性質（数学A）【標準】

(1) $\dfrac{1}{81}$　　(2) 解説参照　　(3) 解説参照

【 解 説 】

［Ⅰ］

(1)(a) $|z_1|=\sqrt{\dfrac{9}{4}+4}=\dfrac{5}{2}$

また $z_1=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)$

$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ とすると $z_1=\dfrac{5}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

(b) $\arg(z_1)=\alpha$ であるから，z_2 を原点を中心として $-\alpha$ だけ回転した点を表す複素数 z_3 は

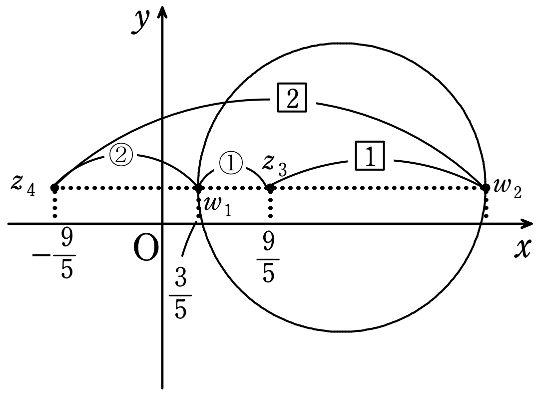
$$z_3=\frac{z_2}{\dfrac{z_1}{|z_1|}}=\frac{\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{5}i}{\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i}=\frac{3(1+3i)(3-4i)}{25}=\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i$$

(c) $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i$ であるから，z_2 を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を表す

複素数 z_4 は

$$z_4=z_2 i=\left(\frac{3}{5}+\frac{9}{5}i\right)\cdot i=\frac{-9}{5}+\frac{3}{5}i$$

(d) 複素数平面上で，2 点 z_3，z_4 からの距離の比が 1 : 2 になる点の全体は，アポロニウスの円により，z_3，z_4 を結ぶ線分を 1 : 2 に内分する点と外分する点を直径の両端とする円を描く．



2 点 z_3，z_4 を 1 : 2 に内分する点を w_1 とすると

$$w_1=\frac{2\cdot z_3+1\cdot z_4}{1+2}=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i\right)$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}i$$

また 2 点 z_3，z_4 を 1 : 2 に外分する点を w_2 とすると

$$w_2=\frac{2\cdot z_3-1\cdot z_4}{-1+2}=2\left(\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i\right)-\left(-\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i\right)=\frac{27}{5}+\frac{3}{5}i$$

これらの中点が円の中心であるから $\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)+\left(\dfrac{27}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)\right\}=3+\dfrac{3}{5}i$

また，半径は $\dfrac{|w_1-w_2|}{2}=\dfrac{1}{2}\left|\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)-\left(\dfrac{27}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)\right|=\dfrac{12}{5}$

別解 「アポロニウスの円」を覚えていない場合は，次のように円の方程式を導けばよい．

2 点 z_3，z_4 からの距離の比が 1 : 2 となる点を w とすると

$$|w-z_3|:|w-z_4|=1:2$$
$$2|w-z_3|=|w-z_4|$$

両辺を 2 乗すると

$$4(w-z_3)(\overline{w}-\overline{z_3})=(w-z_4)(\overline{w}-\overline{z_4})$$

$$4(w\overline{w}-\overline{z_3}w-z_3\overline{w}+z_3\overline{z_3})=w\overline{w}-\overline{z_4}w-z_4\overline{w}+z_4\overline{z_4}$$

$$3w\overline{w}-(4\overline{z_3}-\overline{z_4})w-(4z_3-z_4)\overline{w}=-4z_3\overline{z_3}+z_4\overline{z_4}$$

$$\left\{w-\frac{1}{3}(4z_3-z_4)\right\}\cdot\left\{w-\frac{1}{3}(4\overline{z_3}-\overline{z_4})\right\}=\frac{1}{9}\{(4z_3-z_4)(4\overline{z_3}-\overline{z_4})-12z_3\overline{z_3}+3z_4\overline{z_4}\}$$

$$\left\{w-\frac{1}{3}(4z_3-z_4)\right\}\cdot\left\{w-\frac{1}{3}(\overline{4z_3-z_4})\right\}=\frac{1}{9}\{4z_3\overline{z_3}-4z_3\overline{z_4}-4\overline{z_3}z_4+4z_4\overline{z_4}\}$$

$$\left|w-\frac{1}{3}(4z_3-z_4)\right|^2=\frac{4}{9}|z_3-z_4|^2$$

$$\therefore\quad \left|w-\frac{1}{3}(4z_3-z_4)\right|=\frac{2}{3}|z_3-z_4|$$

よって w の軌跡は円であり,

中心 $\displaystyle \frac{1}{3}(4z_3-z_4)=\frac{1}{3}\left\{4\left(\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i\right)-\left(-\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i\right)\right\}=\mathbf{3+\frac{3}{5}i}$,

半径 $\displaystyle \frac{2}{3}|z_3-z_4|=\frac{2}{3}\left|\left(\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i\right)-\left(-\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i\right)\right|=\mathbf{\frac{12}{5}}$

となる.

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(2)(a) $\displaystyle \frac{x}{a}=t$ とおくと $\displaystyle \frac{dt}{dx}=\frac{1}{a}$,

x	$0\longrightarrow a$
t	$0\longrightarrow 1$

よって $\displaystyle \int_0^a (x^2-a^2x)\,dx=\int_0^1\{(at)^3-a^2(at)\}\cdot a\,dt=a^4\int_0^1(t^3-t)\,dt$

$$=a^3\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{4}a^4$$

よって $\displaystyle p=\mathbf{\frac{-1}{4}}$, $q=\mathbf{4}$

これを用いると $\displaystyle \left|\int_0^a x(x^2-a^2)\,dx\right|=\left|-\frac{1}{4}a^4\right|=\frac{1}{4}a^4$

であるから $\displaystyle \frac{1}{4}a^4=4$ $\therefore$ $a^4=16$

$a\geqq 0$ であるから $a=\mathbf{2}$

(b) $f'(x)=3x^2-12x+10$

$f''(x)=6x-12$

よって，曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる.

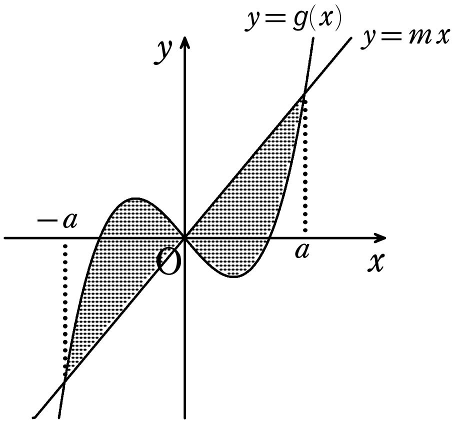
x		2	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	上に凸		下に凸

$f(2)=8-24+20+1=5$ であるから， $y=f(x)$ の変曲点の座標は $(\mathbf{2},\ \mathbf{5})$

3 次関数 $y=f(x)$ の変曲点を通り，$y=f(x)$ と 3 点で交わる直線を l とすると，その方程式は

$$y=m(x-2)+5$$

とおける．



3 次関数のグラフは変曲点に関して対称であるから，$y=f(x)$ は変曲点 $(2,\ 5)$ に関して対称である．この変曲点が原点と重なるように，$y=f(x)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に -5 だけ平行移動したものを $y=g(x)$ とすると，

$$g(x)=(x+2)^3-6(x+2)^2+10(x+2)+1-5=x^3-2x$$

また，直線 l を平行移動したものは $y=mx$ である．

これらが $x=0,\ \pm a\ (a>0)$ で交わるとすると，面積の条件から

$$\left|\int_0^a\{g(x)-mx\}\,dx\right|=\left|\int_0^a x(x^2-a^2)\,dx\right|=4$$

(a) の結果により　　$a=2$

よって，$y=g(x)$ と $y=mx$ は 3 点 $(2,\ 4)$，$(0,\ 0)$，$(-2,\ -4)$ で交わる．

これらを x 軸方向に 2，y 軸方向に 5 だけ平行移動することで，$y=f(x)$ と直線 l の共有点 $(4,\ 9)$，$(2,\ 5)$，$(0,\ 1)$ が得られる．

したがって，3 つの交点のうちで x 座標が最も大きい交点の x 座標は $\mathbf{4}$ である．

また，直線 l の方程式は　　$y=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}(x-2)+5=\mathbf{2x+1}$　　である．

(3)(a)　$2n+1$ 個のデータの総和は　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(-k)+k\}+0=0$

また，$2n+1$ 個のデータを 2 乗したものの総和は

$$\sum_{k=1}^{n}\{(-k)^2+k^2\}+0^2=2\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)\quad\cdots\cdots①$$

よって，分散は　　$\dfrac{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)}{2n+1}-0^2=\dfrac{1}{3}n(n+1)$

分散が $\dfrac{56}{3}$ であることから　　$\dfrac{1}{3}n(n+1)=\dfrac{56}{3}$

$$n(n+1)=7\cdot 8\qquad\therefore\quad \mathbf{n=7}$$

(b)　a_1，a_2，a_3 の平均が 1 であるから　　$\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}=1$　　$\therefore\ a_1+a_2+a_3=3\quad\cdots\cdots①$

また，分散が $\dfrac{26}{3}$ であるから　　$\dfrac{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}{3}-1^2=\dfrac{26}{3}$　　$\therefore\ {a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2=29\quad\cdots\cdots②$

② を満たすものを考えると，29 以下の平方数は 0，1，4，9，16，25 より

$$\{{a_1}^2,\ {a_2}^2,\ {a_3}^2\}=\{0,\ 4,\ 25\},\ \{4,\ 9,\ 16\}$$

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{0,\ \pm2,\ \pm5\},\ \{\pm2,\ \pm3,\ \pm4\}\quad（複号任意）$$

このうち ① 及び $a_1<a_2<a_3$ を満たすものを考えると

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(-2,\ 0,\ 5),\ (-3,\ 2,\ 4)$$

よって $\mathbf{a_3=4}$ または $\mathbf{5}$

(c)　(a) より $n=7$ であるから，データの総数は $2\cdot7+1=15$ である．
取り除いた $(a_1,\ a_2,\ a_3)=(-3,\ 2,\ 4)$ の平均は 1 であるから，残り 12 個のデータの平均は

$$\frac{0-1\cdot3}{12}=\frac{-1}{4}$$

また，① より 15 個のデータを 2 乗したものの総和は　$\dfrac{1}{3}\cdot7\cdot8\cdot(2\cdot7+1)=280$

よって，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(-3,\ 2,\ 4)$ を取り除いた，残り 12 個のデータを 2 乗したものの平均は

$$\frac{280-\{(-3)^2+2^2+4^2\}}{12}=\frac{280-29}{12}=\frac{251}{12}$$

したがって，求める分散は　$\dfrac{251}{12}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1004-3}{48}=\mathbf{\dfrac{1001}{48}}$

補足

$n=7$ のときの 15 個のデータ，

$-7,\ \ -6,\ \ -5,\ \ -4,\ \ -3,\ \ -2,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ 6,\ \ 7$

から $(a_1,\ a_2,\ a_3)=(-3,\ 2,\ 4)$ を取り除いた

$-7,\ \ -6,\ \ -5,\ \ -4,\ \ -2,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7$

の平均，分散を直接計算してもよい．

補足終わり

(4)(a)　$2x^2+y^2+3x-2y+1=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+(y-1)^2-\dfrac{9}{8}$

$-2\leqq x\leqq2,\ \ -2\leqq y\leqq2$ より　$0\leqq\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2\leqq\dfrac{49}{16},\ \ 0\leqq(y-1)^2\leqq9$

よって $x=-\dfrac{3}{4}$，$y=1$ のとき，最小値 $\mathbf{-\dfrac{9}{8}}$ である．

また，$x=2$，$y=-2$ のとき，最大値 $2\cdot2^2+(-2)^2+3\cdot2-2(-2)+1=\mathbf{23}$ である．

別解 1　最大値は線形計画法を用いて求めてもよい（最小値は線形計画法を用いるまでもない）．

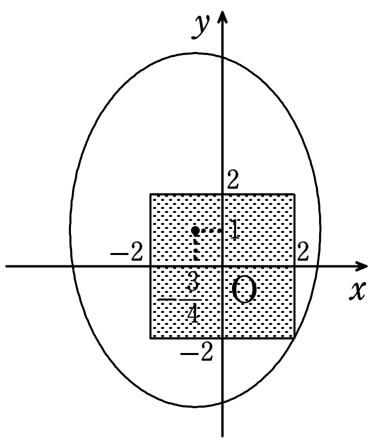
$2x^2+y^2+3x-2y+1=k$ とおくと　$2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+(y-1)^2=k+\dfrac{9}{8}$

$k+\dfrac{9}{8}>0$ のとき　$\dfrac{\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2}{\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{9}{8}\right)}+\dfrac{(y-1)^2}{k+\dfrac{9}{8}}=1$　……①

$\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{9}{8}\right)<k+\dfrac{9}{8}$ であるから，① は xy 平面上において

中心が $\left(-\dfrac{3}{4},\ 1\right)$ で $x=-\dfrac{3}{4}$ 上に焦点をもち，短半径が

$\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{9}{8}\right)}$，長半径が $\sqrt{k+\dfrac{9}{8}}$ の楕円を表す．



この楕円が，領域 D と共有点をもつときの k の最大値を考えると，楕円 ① が $(2,\ -2)$ を通るときであるから，最大値は

$$k=2\cdot2^2+(-2)^2+3\cdot2-2\cdot(-2)+1=23$$

別解 1 終わり

(b)　$f(x,\ y)=x^2-4xy+4y^2+2x+y+1$ とおく．

これを x の関数とみると

$$f(x,\ y)=x^2-2(2y-1)x+4y^2+y+1=\{x-(2y-1)\}^2+5y$$

$-2\leqq y\leqq 2$ より　　$-5\leqq 2y-1\leqq 3$

最大値について，

(Ⅰ) $-5\leqq 2y-1\leqq 0$，つまり $-2\leqq y\leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x,\ y)$ の最大値は　　$f(2,\ y)=4y^2-7y+9=4\left(y-\dfrac{7}{8}\right)^2+\dfrac{95}{16}$

次に y を動かすと，$-2\leqq y\leqq \dfrac{1}{2}$ より最大値は　　$f(2,\ -2)=39$

(Ⅱ) $0<2y-1\leqq 3$，つまり $\dfrac{1}{2}<y\leqq 2$ のとき

$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x,\ y)$ の最大値は　　$f(-2,\ y)=4y^2+9y+1=4\left(y+\dfrac{9}{8}\right)^2-\dfrac{65}{16}$

次に y を動かすと，$\dfrac{1}{2}<y\leqq 2$ より最大値は　　$f(-2,\ 2)=35<39$

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，$f(x,\ y)$ は $x=2,\ \ y=-2$ のとき，最大値 **39** をとる．

次に，最小値について

(ⅰ) $-5\leqq 2y-1<-2$，つまり $-2\leqq y<-\dfrac{1}{2}$ のとき

$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x,\ y)$ の最小値は　　$f(-2,\ y)=4y^2+9y+1=4\left(y+\dfrac{9}{8}\right)^2-\dfrac{65}{16}$

次に y を動かすと，$-2\leqq y<-\dfrac{1}{2}$ より最小値は　　$f\left(-2,\ -\dfrac{9}{8}\right)=-\dfrac{65}{16}$

(ⅱ) $-2\leqq 2y-1<2$，つまり $-\dfrac{1}{2}\leqq y<\dfrac{3}{2}$ のとき

$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x,\ y)$ の最小値は　　$f(2y-1)=5y$

次に y を動かすと，$-\dfrac{1}{2}\leqq y<\dfrac{3}{2}$ より最小値は　　$f\left(2y-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}>-\dfrac{65}{16}$

(ⅲ) $2\leqq 2y-1\leqq 3$，つまり $\dfrac{3}{2}\leqq y\leqq 2$ のとき

$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x,\ y)$ の最小値は　　$f(2,\ y)=4y^2-7y+9=4\left(y-\dfrac{7}{8}\right)^2+\dfrac{95}{16}$

次に y を動かすと，$\dfrac{3}{2}\leqq y\leqq 2$ より最小値は　　$f\left(2,\ \dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{15}{2}>-\dfrac{65}{16}$

(ⅰ)～(ⅲ) より，$x=-2,\ \ y=-\dfrac{9}{8}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{65}{16}}$ をとる．

$\boxed{別解２}$　変数変換を行えば，線形計画法を用いて最大・最小値を求めることもできる．

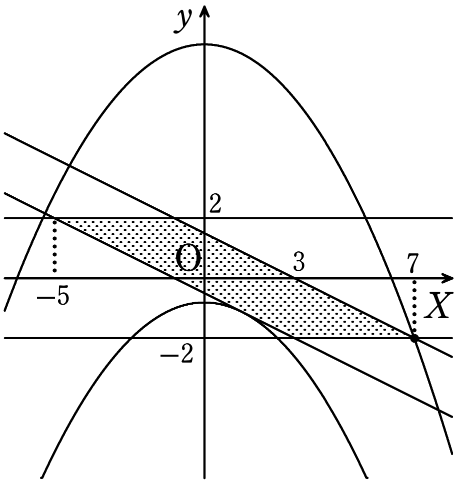
(b)　$x^2-4xy+4y^2+2x+y+1=k$ とおくと

$$k=\{x-(2y-1)\}^2+5y$$

$x-2y+1=X$ とおくと　　$k=X^2+5y$　……①

また，$x=X+2y-1$ であるから $-2\leqq x\leqq 2$ より

$$-2\leqq X+2y-1\leqq 2 \iff \begin{cases} y\geqq -\dfrac{1}{2}X-\dfrac{1}{2} \\ y\leqq -\dfrac{1}{2}X+\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$



$-2\leqq y\leqq 2$ かつ ② が満たす領域を Xy 平面に図示すると，
右の図の網目部分となる．ただし，境界線を含む．
この領域と Xy 平面上の放物線 ① が共有点を持つときの，
k の最大値と最小値を求める．

k が最大となるのは，① が $y=-\dfrac{1}{2}X+\dfrac{3}{2}$ と $y=-2$ の交点 $(7,\ -2)$ を通るときであるから，

最大値は　　$k=7^2+5(-2)=\mathbf{39}$

また，k が最小となるのは ① が直線 $y=-\dfrac{1}{2}X-\dfrac{1}{2}$ と接するときである．

① と $y=-\dfrac{1}{2}X-\dfrac{1}{2}$ を連立させると　　$k=X^2+5\left(-\dfrac{1}{2}X-\dfrac{1}{2}\right)$　　$\therefore\ 2X^2-5X-2k-5=0$

判別式を D とすると $D=0$ より最小値は

$$5^2-8(-2k-5)=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{\mathbf{65}}{\mathbf{16}}$$

$\boxed{補足}$

本問の最大値・最小値を正確に求めるのは容易でない．このような場合であっても，極値や定義域の端の値を計算してみて，解答欄に当てはまる値を見つけてみる姿勢も大切である．特に，2 変数関数 $f(x,y)$ が x でも y でも微分可能であるとき，最大値または最小値となりうるのは，境界上の点または x,y で微分して微分係数が 0 となる点である．

$\boxed{補足}$終わり

［Ⅱ］

(a)　正五角形 ABCDE は円に内接するから，

四角形 ABCD も円に内接する．

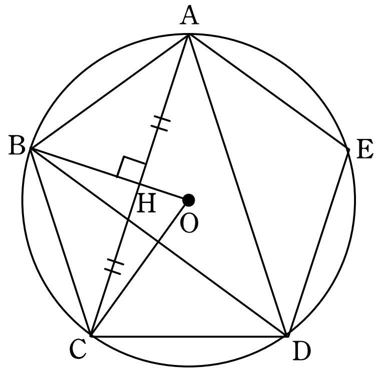
AC＝BD＝AD＝l とおくと，トレミーの定理により

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot DA$$

$$l^2=1+l \qquad \therefore\quad l^2-l-1=0$$

$l>0$ より　　$l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって対角線 AC の長さは　　$\mathrm{AC}=\dfrac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$



$\boxed{\text{別解}}$　三角形の相似を用いてもよい．

対角線 AC，BE の交点を X とする．正五角形 ABCDE は円に内接し，AB＝BC＝AE であるから，円周角の定理により

$$\angle BAC=\angle ACB=\angle ABE$$

よって △XAB∽△BCA であるから　　XA : AB＝BC : CA　……①

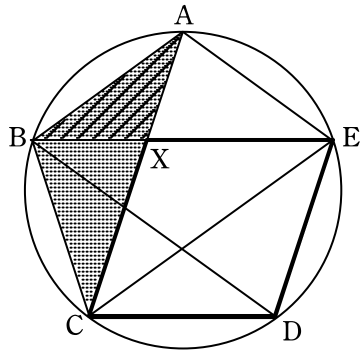
また， BE∥CD， AC∥ED，CD＝DE＝1 より，

四角形 XBCD はひし形であるから， AC＝l とすると

$$XA=AC-XC=l-1$$

したがって ① より　　$l-1:1=1:l$　　$\therefore\quad l^2-l-1=0$

$l>0$ であるから　　$l=\mathrm{AC}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



$\boxed{\text{別解}}$終わり

$\angle BAC=\phi$ とおく．B から AC へ垂線 BH を下ろすと

$$\cos\phi=\frac{AH}{AB}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

よって　　$\sin^2\phi=1-\cos^2\phi=1-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\dfrac{\mathbf{5-\sqrt{5}}}{\mathbf{8}}$

正五角形の外接円の半径 r は，△ABC の外接円の半径に等しいから，正弦定理により

$$2r=\frac{BC}{\sin\phi} \qquad \therefore\quad r^2=\frac{BC^2}{4\sin^2\phi}=\frac{1^2}{4\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)}=\frac{2}{5-\sqrt{5}}=\frac{\mathbf{5+\sqrt{5}}}{\mathbf{10}}$$

また，円周角と中心角の関係より　　$\angle BOC=2\angle BAC=2\phi$

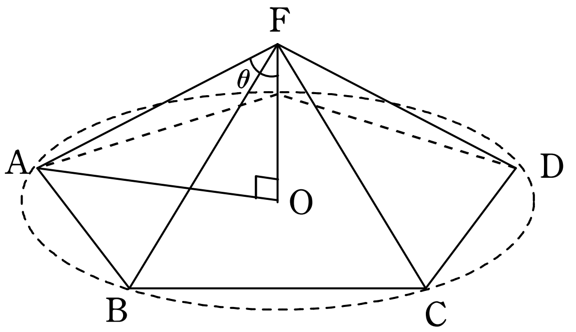
したがって，正五角形の面積 S について

$$S=5\times\triangle OBC=5\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin 2\phi\right)=\frac{5}{2}r^2\sin 2\phi=5r^2\sin\phi\cos\phi$$

よって　　$S^2=25r^4\sin^2\phi\cos^2\phi=25\cdot\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right)^2\cdot\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$$=25\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{8}=\frac{\mathbf{25+10\sqrt{5}}}{\mathbf{16}}$$

(b)　△AFO に注目すると，$\angle\mathrm{AOF}=\dfrac{\pi}{2}$



であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{OF}^2=\mathrm{AF}^2-\mathrm{OA}^2$$

$$h^2=1^2-r^2$$

$$=1-\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$\angle\mathrm{AFO}=\theta$ とおくと，

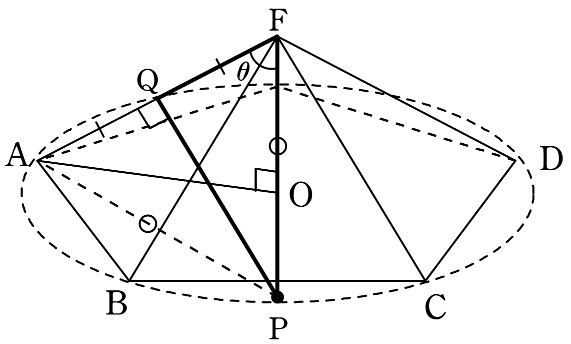
$$\sin\theta=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AF}}=r,\quad \cos\theta=\frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{AF}}=h$$

であるから

$$\sin^2 2\theta=4\sin^2\theta\cos^2\theta=4r^2h^2=4\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{10}=\frac{2^2\cdot 5}{5^2}$$

$0<2\theta<\pi$ であるから　　$\sin 2\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(c)　正二十面体の外接球の中心を P とする．



P から AF へ垂線 PQ を下ろすと，

PF＝PA＝R より　　$\mathrm{AQ}=\mathrm{FQ}=\dfrac{1}{2}$

また，$\angle\mathrm{PFQ}=\angle\mathrm{AFO}=\theta$ であるから，

△PFQ に注目すると

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{2\cos\theta}$$

よって　　$R^2=\dfrac{1}{4\cos^2\theta}=\dfrac{1}{4h^2}=\dfrac{1}{4\cdot\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$

［Ⅲ］

(1)　$945-378=567=3^4\cdot 7$

よって　　$n_3(945-378)=n_3(567)=4$

したがって　　$d_3(945,\ 378)=3^{-4}=\dfrac{1}{81}$

(2)　$x=p^a l$ (l は p と互いに素な 0 でない整数) とすると　　$n_p(x-0)=a$

また，m は自然数であるから，

$m=p^b k$ (b は 0 以上の整数，k は自然数)

とおくことができ，

$mx=p^a l\cdot p^b k=p^{a+b}kl$

よって $b\geqq 0$ であるから　　$n_p(mx-0)\geqq a+b\geqq a=n_p(x-0)$

$p>1$ であるから　　$p^{-n_p(mx-0)}\leqq p^{-n_p(x-0)}$　$\Longleftrightarrow$　$d_p(mx,\ 0)\leqq d_p(x,\ 0)$　■

(3)　$d_p(x,\ z)\leqq d_p(x,\ y)+d_p(y,\ z)$　………(*)　とする．

$x=y$ のとき $d_p(x,\ y)=d_p(x,\ x)=0$，$d_p(x,\ z)=d_p(y,\ z)$ となるから

$d_p(x,\ z)=d_p(x,\ y)+d_p(y,\ z)$

となり，(*) の等号が成り立つ．

$y=z$ のときも同様に (*) の等号が成り立つ．

また，$z=x$ のとき $d_p(x,\ z)=d_p(x,\ x)=0$ となるから，$d_p(x,\ y)\geqq 0$，$d_p(y,\ z)\geqq 0$ より，

不等式 (*) は成り立つ．

x，y，z が互いに異なる整数であるとき，

$x-y=p^a\cdot k$，$y-z=p^b\cdot l$　(k，l はいずれも p と互いに素な 0 でない整数)

とすると

$n_p(x-y)=a$，$n_p(y-z)=b$

また　　$x-z=p^a\cdot k+p^b\cdot l$

(ⅰ) $a>b$ のとき　　$x-z=p^b(p^{a-b}\cdot k+l)$

$p^{a-b}\cdot k+l$ は p と互いに素であるから　　$n_p(x-z)=b$

このとき　$d_p(x,\ y)+d_p(y,\ z)=p^{-a}+p^{-b}>p^{-b}=d_p(x-z)$　となり，(*) が成り立つ．

(ⅱ) $a\leqq b$ のとき　　$x-z=p^a(k+p^{b-a}\cdot l)$

$k+p^{b-a}\cdot l$ は p と互いに素とは限らないから　　$n_p(x-z)\geqq a$

このとき　$d_p(x,\ y)+d_p(y,\ z)=p^{-a}+p^{-b}>p^{-a}\geqq d_p(x-z)$　となり，(*) が成り立つ．

以上より，すべての整数 x，y，z について，不等式 (*) が成り立つ．■