解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2021 年度　慶應義塾大学医学部

【 講 評 】

例年通り大問 4 題で出題され，ほとんどが空欄補充形式で，記述式の証明問題が設問 1 つだけ出題された点も変更がなかった．昨年度と比較すると全体的な難易度はやや易しくなったが，計算量が多くなったため，得点率は大きく変わらないだろう．難しい問題であっても大半は穴埋め式の問題であるから，空欄が埋まればよいという姿勢で効率よく得点を重ね，7 割以上を得点したい．以下，設問ごとに述べる．

［Ⅰ］小問集合【⑴ やや易／⑵ 標準／⑶ 標準】

（1）平面図形とベクトルの典型問題である．これは落とせない問題である．

（2）x 軸回転体の体積に関する極限の問題である．これも典型的な問題であるから落とせない．

（3）2 次方程式の解に関する条件から，方程式中の定数 k のとり得る値の個数を調べる問題である．与えられた集合の条件から，解の状態を正確に把握できたかがポイントとなる．特に後半の整数解の条件処理がやや煩雑であるため，実力差が表れやすい問題である．

［Ⅱ］データの分析［数 A］／数列［数 B］【標準】

例年出題されていた確率が出題されなかった代わりに，データの分析が出題されて驚いた受験生は少なくないだろう．共分散や相関係数に関する標準的な問題であり，共分散を求めるための公式や相関係数の性質が理解できている人にとっては，穴埋め式の問題ということもあって，かなり解答しやすかったであろう．一方で，対策が不十分であった受験生も少なくなかっただろう．出来が分かれる問題である．

［Ⅲ］図形と方程式［数Ⅱ］／２次曲線［数Ⅲ］［やや難］

一見すると図形問題のようであるが，本質的には３点 A，P，Q に関する線分比の条件が与えられた軌跡の問題である．条件を変更することで定まる円，楕円，双曲線に関して解析していく．やるべきことは単純であるが，計算がやや煩雑であるため，出来が分かれる問題である．

［Ⅳ］媒介変数表示［数Ⅲ］／微分法［数Ⅲ］［標準］

双曲線関数に関する問題であった．前半の媒介変数表示を求めるところは典型的な問題であるから落とせない．後半は特別な発想は必要ないが，計算が煩雑である．双曲線関数の式変形に慣れている人や，類題を解いたことがある人以外は苦戦したことが予想される．

【 解 答 】

［Ⅰ］(1) (あ) $\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$, (い) $\dfrac{1}{3}$, (う) $\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$,

(2) (え) $\dfrac{\pi}{3m}$, (お) $\dfrac{2}{5}$,

(3) (か) 176, (き) 2, (く) 6 (け) 8, (こ) 3

［Ⅱ］(1) (あ) $\dfrac{1}{2}(n+1)$, (い) $\dfrac{1}{2}(n-1)(n+1)$

(2) 解説参照

(3) (う) $(n-1)n(n+1)$, (え) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$, (お) x_i, (か) 1 (き) $n+1-x_i$, (く) -1

［Ⅲ］(1) (あ) $\dfrac{h^2T}{h^2-g^2}$, (い) 1, (う) $\dfrac{hgT}{|h^2-g^2|}$,

(2) (え) $h>g$, (お) $\dfrac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1$, (か) $-\dfrac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1$,

(3) (き) $\dfrac{h^2}{g^2-h^2}$, (く) 0, (け) $\dfrac{h^2}{g^2}$, (こ) 0, (さ) $g>h$, (し) 0, (す) 1,

(せ) 0, (そ) -1, (た) 0, (ち) 1, (つ) 0, (て) -1, (と) $\sqrt{2}$

※ ((し), (す)) と ((せ), (そ)), ((た), (ち)) と ((つ), (て)) は順不同である.

［Ⅳ］ (あ) $t-\dfrac{r(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}}$, (い) $\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}+\dfrac{2r}{e^t+e^{-t}}$, (う) $0<r\leqq 1$,

(え) $t=\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$, (お) $2\sqrt{r}$, (か) $\left(\dfrac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}\right)^2$

【 解 説 】

［Ⅰ］

(1) $-5\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ より $\qquad 5\overrightarrow{OA}=7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}$ ……①

両辺の大きさの 2 乗を計算すると，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ より

$$25=48+112\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+64$$

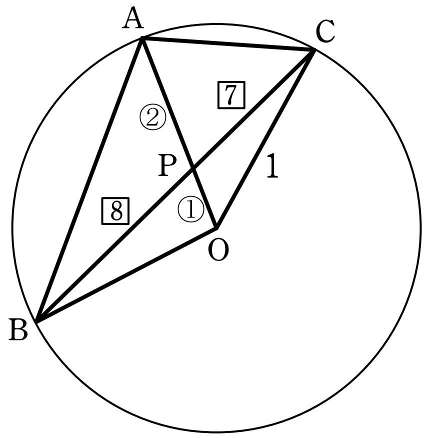
$$\therefore\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{11}{14}$$

よって $\quad |\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2$

$$=1^2-2\cdot\left(-\frac{11}{14}\right)+1^2=\frac{25}{7}$$

$|\overrightarrow{BC}|>0$ であるから $\qquad |\overrightarrow{BC}|=\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

また ① より $\qquad \overrightarrow{OA}=\dfrac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{5}=3\cdot\dfrac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{15}$



$\dfrac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{15}$ は OA 上，かつ BC 上の点を表すから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{15}$$

よって $\quad \overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OP} \qquad \therefore\quad \overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

したがって $\qquad |\overrightarrow{OP}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{OA}|=\dfrac{1}{3}$

また，△OBC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot1^2-\left(-\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{28}$$

であり，△OBC : △ABC＝OP : AP＝1 : 2 であるから，△ABC の面積は

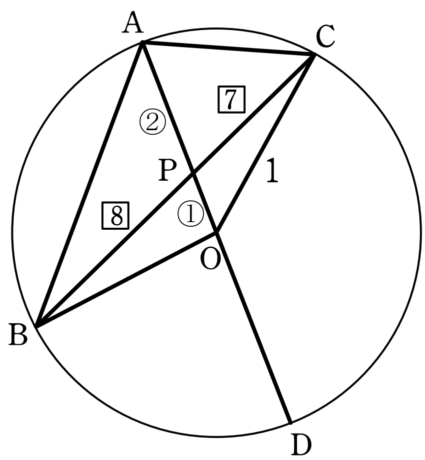
$$2\triangle OBC=2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{28}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$\boxed{別解}$ BC の長さは，方べきの定理を用いて求めることもできる．

直線 OP と円の交点のうち，A でない方を D とする．

$OD=1,\ OP=\dfrac{1}{3}$ より $\qquad PA=\dfrac{2}{3},\ PD=\dfrac{4}{3}$

また，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{15}$ より $\qquad BP : PC=8 : 7$



よって，$BP=8t,\ CP=7t$ とおけるから，

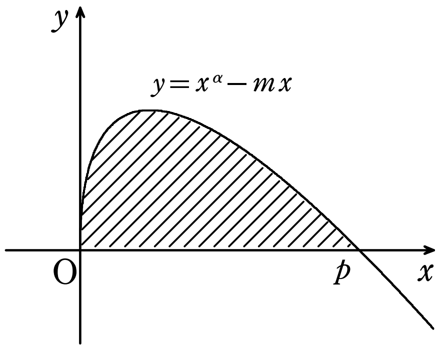
方べきの定理より

$$8t\cdot7t=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\qquad\therefore\quad t=\frac{1}{3\sqrt{7}}$$

したがって $\qquad BC=15t=\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

$\boxed{別解}$終わり

(2)　$y=x^{\alpha}-mx=x^{\alpha}(1-mx^{1-\alpha})$



$y=0$ のとき　　$x=0$，$\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$（$=p$ とおく．）

$$\begin{aligned} V&=\int_0^p \pi(x^{\alpha}-mx)^2\,dx \\ &=\pi\int_0^p (x^{2\alpha}-2mx^{\alpha+1}+m^2x^2)\,dx \\ &=\pi\left[\frac{1}{2\alpha+1}x^{2\alpha+1}-\frac{2m}{\alpha+2}x^{\alpha+2}+\frac{1}{3}m^2x^3\right]_0^p \\ &=\pi\left(\frac{1}{2\alpha+1}p^{2\alpha+1}-\frac{2m}{\alpha+2}p^{\alpha+2}+\frac{1}{3}m^2p^3\right) \end{aligned}$$

$p=\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ であるから　　$V=\pi\left\{\dfrac{1}{2\alpha+1}\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{2\alpha+1}{1-\alpha}}-\dfrac{2}{\alpha+2}\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{2\alpha+1}{1-\alpha}}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{2\alpha+1}{1-\alpha}}\right\}$

よって　　$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}V=\pi\left\{1\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1-1\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}\right)^1\right\}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3m}}$

また　　$m^3V=\pi\left\{\dfrac{1}{2\alpha+1}\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{2\alpha+1}{1-\alpha}-3}-\dfrac{2}{\alpha+2}\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{2\alpha+1}{1-\alpha}-3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{2\alpha+1}{1-\alpha}-3}\right\}$

$$=\pi\left(\frac{1}{2\alpha+1}-\frac{2}{\alpha+2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{5\alpha-2}{1-\alpha}}$$

ここで $0<\alpha<1$ より $0<1-\alpha$ であるから

$5\alpha-2>0$ のとき　　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{5\alpha-2}{1-\alpha}}=0$

$5\alpha-2=0$ のとき　　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{5\alpha-2}{1-\alpha}}=1$

$5\alpha-2<0$ のとき　　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{5\alpha-2}{1-\alpha}}=\infty$

よって $m\longrightarrow\infty$ のとき m^3V が 0 でない値に収束するには $5\alpha-2=0$，すなわち $\alpha=\dfrac{2}{5}$ が

必要である．このとき

$$\lim_{m\to\infty}m^3V=\pi\left(\frac{1}{2\cdot\frac{2}{5}+1}-\frac{2}{\frac{2}{5}+2}+\frac{1}{3}\right)\cdot1=\frac{\pi}{18}$$

となり，確かに 0 でない値に収束する．

したがって，求める α の値は　　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{2}{5}}$

$\boxed{\text{参考}}$　極限と積分の順番が交換できることを認めれば，次のように答えが求められる．

$p=\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}p=\frac{1}{m}$ より

$$V=\pi\int_0^p (x^{\alpha}-mx)^2\,dx \xrightarrow{\alpha\to+0} \pi\int_0^{\frac{1}{m}}(1-mx)^2\,dx=\pi\left[-\frac{1}{3m}(1-mx)^3\right]_0^{\frac{1}{m}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3m}}$$

$\boxed{\text{参考}}$終わり

(3)　$x^2+kx+k+35=0$　……①　とする．

$k\in A$ となるのは，① が異なる 2 つの実数解をもつときであるから，① の判別式をD とすると

$D=k^2-4k-140>0$

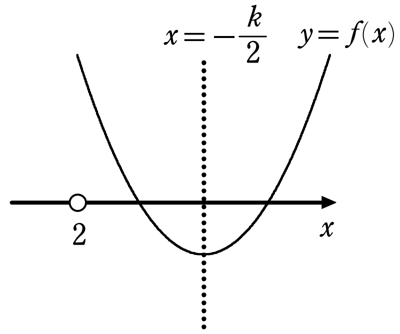
$(k-14)(k+10)>0$　　$\therefore$　$k<-10$，$14<k$　……②

これと $|k|\leqq 100$ との共通部分を考えると　　$-100\leqq k\leqq -11$，$15\leqq k\leqq 100$

よって　　$n(A)=90+86=176$

$k\in A\cap B$ となるのは，① が 2 より大きい異なる 2 つの実数解をもつときである．

$f(x)=x^2+kx+k+35$ とおくと　　$f(x)=\left(x+\dfrac{k}{2}\right)^2-\dfrac{k^2}{4}+k+35$



$f(2)>0$ より　　$3k+39>0$　　$\therefore$　$k>-13$　……③

$y=f(x)$ の軸について　　$-\dfrac{k}{2}>2$　　$\therefore$　$k<-4$　……④

②，③，④ の共通部分を考えると　　$-13<k<-10$

k は整数であるから　　$k=-12$，-11

よって　　$n(A\cap B)=2$

$k\in\overline{A}\cap B$ となるのは，次の 2 つの場合である．

(ア)　① が 2 より大きい重解を持つ

(イ)　① が，実部が 2 よりも大きい虚数解をもつ

(ア) について

$D=0$ であるから　　$k=-10$，14

このうち ④ を満たす $k\in U$ を考えると　　$k=-10$

(イ) について

$D<0$ であるから　　$-10<k<14$　……⑤

k は整数，つまり実数であるから，$\alpha_k=a+bi$ とすると $\beta_k=a-bi$ となる．

よって，解と係数の関係により　　$\alpha_k+\beta_k=2a=-k$

$a>2$ であるから　　$2a=-k>4$　　$\therefore$　$k<-4$　……⑥

⑤，⑥ を同時に満たす$k\in U$ は　　$k=-9$，-8，-7，-6，-5

(ア)，(イ) より　　$n(\overline{A}\cap B)=1+5=6$

$k\in A\cap C$ となるのは，① が異なる 2 つの整数解 α_k，β_k $(\alpha_k<\beta_k)$ をもつときである．

解と係数の関係により　　$\alpha_k+\beta_k=-k$，$\alpha_k\beta_k=k+35$

2 式の和をとると　　$\alpha_k+\beta_k+\alpha_k\beta_k=35$　　$\therefore$　$(\alpha_k+1)(\beta_k+1)=36$　……⑦

$\alpha_k+1<\beta_k+1$，$k=-(\alpha_k+\beta_k)$ であるから，これを満たすのは

α_k+1	1	2	3	4	-36	-18	-12	-9
β_k+1	36	18	12	9	-1	-2	-3	-4
α_k	0	1	2	3	-37	-19	-13	-10
β_k	35	17	11	8	-2	-3	-4	-5
k	-35	-18	-13	-11	39	22	17	15

② かつ $k\in U$ を満たすものは　　$k=-35$，-18，-13，-11，39，22，17，15

よって　　$n(A\cap C)=8$

$k \in \overline{A} \cap C$ となるのは，次の 2 つの場合である．

(ウ) ① が整数の重解をもつ．

(エ) ① が虚数解をもち，その実部と虚部がすべて整数である．

(ウ) について

方程式 ① が重解を持つのは，$D=0$ より　$k=-10,\ 14$

これらは $k \in U$ を満たし，

$k=-10$ のとき　$x=5$，

$k=14$ のとき　$x=-7$

となるから，整数の重解を持つ．

したがって　$k=-10,\ 14$

(エ) について

① が虚数解をもつとき，⑤ より　$-10<k<14$

このとき $\alpha_k=a+bi$，$\beta_k=a-bi$ (a，b は整数) とおけるから，解と係数の関係により

$$\alpha_k+\beta_k=2a=-k,\quad \alpha_k\cdot\beta_k=a^2+b^2=k+35$$

2 式の和をとると

$$2a+a^2+b^2=35 \qquad \therefore\ (a+1)^2+b^2=36$$

$(a+1)^2 \geqq 0$，$b^2 \geqq 0$ であり，36 以下の平方数は 0，1，4，9，16，25，36 であるから，これを満たすのは

$((a+1)^2,\ b)=(36,\ 0),\ (0,\ 36)$

$(a+1,\ b)=(6,\ 0),\ (-6,\ 0),\ (0,\ 6),\ (0,\ -6)$

$\therefore\ (a,\ b)=(5,\ 0),\ (-7,\ 0),\ (-1,\ 6),\ (-1,\ -6)$

$2a=-k$ であるから，⑤ かつ $k \in U$ となるものは　$k=2$

(ウ)，(エ) より，　$n(\overline{A} \cap C)=3$

$\boxed{\text{別解}}$　(エ) は次のように考えてもよい．

(エ) について

① より $D<0$ のとき　$x\dfrac{-k\pm\sqrt{D}}{2}=-\dfrac{k}{2}\pm\dfrac{\sqrt{-D}}{2}i$

これの実部と虚部がともに整数となるのは，k が偶数かつ $-D=-(k+10)(k-14)$ が偶数の平方数となるときであるから，$D<0$ すなわち ⑤ を満たす k について調べると

k	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12
$k+10$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$k-14$	-22	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2
$-D$	44	80	108	108	140	12^2	140	108	108	80	44

よって $k=2 \in U$ のみである．

(ウ)，(エ) より　$n(\overline{A} \cap C)=3$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

［Ⅱ］

(1)　$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)$

また　$s_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2-\overline{x}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2-\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}^2$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{12}(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\}=\frac{1}{12}(n-1)(n+1)$$

(2)　$n=2l$ (l は奇数) とすると

$$s_{xy}=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}(x_ky_k-\overline{y}x_k-\overline{x}y_k+\overline{x}\cdot\overline{y})$$

$$=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}x_ky_k-\overline{y}\cdot\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}x_k-\overline{x}\cdot\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}y_k+\overline{x}\cdot\overline{y}$$

$\overline{x}=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}x_k$，$\overline{y}=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}y_k$ であるから

$$s_{xy}=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}x_ky_k-\overline{y}\cdot\overline{x}-\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{y}=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}x_ky_k-\overline{x}\cdot\overline{y}$$

$\overline{x}=\overline{y}=\frac{1}{2}(2l+1)$ であるから

$$s_{xy}=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l}x_ky_k-\frac{1}{2}(2l+1)\cdot\frac{1}{2}(2l+1)=\frac{1}{4l}\left\{2\sum_{k=1}^{2l}x_ky_k-l(2l+1)^2\right\}$$

$\sum_{k=1}^{2l}x_ky_k$ は整数であるから，$2\sum_{k=1}^{2l}x_ky_k$ は偶数である．一方，l は奇数であるから，$l(2l+1)^2$ は奇数

である．よって $2\sum_{k=1}^{2l}x_ky_k-l(2l+1)^2\neq 0$ であるから $s_{xy}\neq 0$ である．　■

(3)　$\overline{x}=\overline{y}$ であるから　$d_i=x_i-y_i=(x_i-\overline{x})-(y_i-\overline{y})$

両辺を 2 乗すると　$d_i{}^2=(x_i-\overline{x})^2-2(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+(y_i-\overline{y})^2$

両辺の $i=1$，2，3，……，n のときの和をとると

$$\sum_{i=1}^{n}d_i{}^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$$

よって　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i{}^2=s_x{}^2-2s_{xy}+s_y{}^2$

$s_x{}^2=s_y{}^2$ であるから　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i{}^2=2s_x{}^2-2s_{xy}$　　$\therefore$　$s_{xy}=s_x{}^2-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}d_i{}^2$

したがって，相関係数 r は $s_x{}^2=s_y{}^2=\frac{1}{12}(n-1)(n+1)$ より

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\frac{s_x{}^2-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}d_i{}^2}{s_x{}^2}=1-\frac{1}{2ns_x{}^2}\sum_{i=1}^{n}d_i{}^2$$

$$=1-\frac{1}{2n}\cdot\frac{12}{(n-1)(n+1)}\sum_{i=1}^{n}d_i{}^2=1-\frac{6}{(n-1)n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}d_i{}^2$$

(4)　相関係数 r のとり得る値の範囲は $-1 \leqq r \leqq 1$ である．
$y_i = x_i$ のとき，$(x_i,\ y_i)$ は正の傾きの直線上であるから，最大値 $r=1$ をとる．
また $y_i = -x_i + n + 1$ のとき，$(x_i,\ y_i)$ は負の傾きの直線上にあるから，最小値 $r=-1$
をとる．

$\boxed{\text{別解}}$　相関係数の値域を覚えていなければ，次のように最大・最小値を求めればよい．

${d_i}^2 \geqq 0$ より　　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 \geqq 0$

よって $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ が最小となるとき，相関係数 r は最大となる．

これは ${d_i}^2 = 0$，すなわち $d_i = 0$ のときであるから　　$x_i = y_i$

このとき相関係数の最大値は　　$r=1$

また，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ が最大となるとき，相関係数 r は最小となる．

$$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 - 2x_i y_i + {y_i}^2) = 2\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$= 2\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right\}$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ が最大となるのは，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ が最小となるときである．これは x_i が小さい順，すなわち $x_i = i$
であるとすると，y_i が大きい順であるとき，すなわち $y_i = n+1-i$ となるときであるから

$$y_i = n + 1 - x_i \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つときである．
このとき

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} i(n+1-i) = (n+1)\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= (n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

よって $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最大値は

$$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 = 2\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right\} = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

であるから，相関係数 r の最小値は

$$r = 1 - \frac{6}{(n-1)n(n+1)}\cdot\frac{1}{3}(n-1)n(n+1) = -1$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

$\boxed{\text{補足１}}$　①のときが最小であることは，次のように示すことができる．

実数 x，　y，　a，　b が $x<y$，　$a<b$ を満たすとき

$$ay+bx<ax+by \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

$x_i=i$ とし，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}iy_i$ が最小になるとき，　$y_i=n+1-i$ が成り立つことを示す．

$y_1 \fallingdotseq n$ のとき $y_j=n$ を満たす $j \fallingdotseq 1$ なる自然数が存在する．

$1<j$，　$y_1<n$ であるから，$(*)$ より

$$1\cdot n+j\cdot y_1<1\cdot y_1+j\cdot n$$

したがって，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}iy_i$ を最小にする並び方は $y_1=n=n+1-1$ である．

これを繰り返すと $y_i=n+1-i$ を得る．

$\boxed{\text{補足１}}$終わり

$\boxed{\text{補足２}}$　$\boxed{\text{補足１}}$の不等式（＊）に気づけない場合は，次のように示すこともできる．

$x_i=i$ とする．

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n+1-i-y_i)^2 \geqq 0$ であるから

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{(n+1-i)^2-2(n+1-i)y_i+{y_i}^2\right\}\geqq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^2-2(n+1)\sum_{i=1}^{n}y_i+2\sum_{i=1}^{n}iy_i+\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2\geqq 0$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{2}n(n+1)$，　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2=\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であるから

$$2\sum_{i=1}^{n}iy_i\geqq 2(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

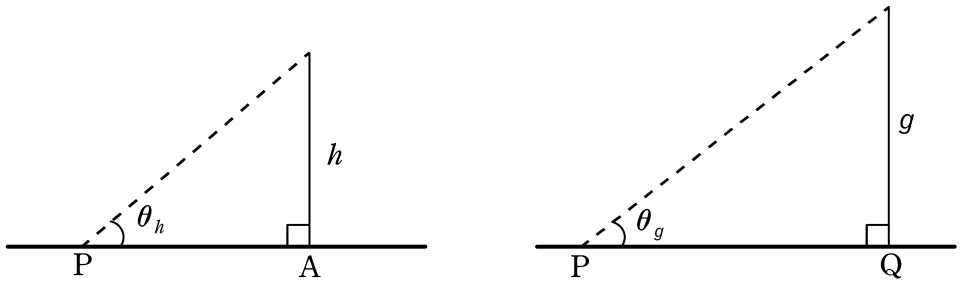
$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}iy_i\geqq\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

等号が成り立つのは

$$(n+1-i-y_i)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad y_i=n+1-i$$

$\boxed{\text{補足２}}$終わり

［Ⅲ］



点 P から高さ h，g の塔を見上げる角度を θ_h，θ_g $\left(0<\theta_h<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\theta_g<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$$\tan\theta_h=\frac{h}{\mathrm{PA}},\quad \tan\theta_g=\frac{g}{\mathrm{PQ}}$$

$\theta_h=\theta_g$ のとき，$\tan\theta_h=\tan\theta_g$ が成り立つから

$$\frac{h}{\mathrm{PA}}=\frac{g}{\mathrm{PQ}} \qquad \therefore\quad h^2\mathrm{PQ}^2=g^2\mathrm{PA}^2$$

$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると　　$\mathrm{PQ}^2=(X-x)^2+(Y-y)^2$，　　$\mathrm{PA}^2=X^2+(Y-1)^2$

よって　　$h^2\{(X-x)^2+(Y-y)^2\}=g^2\{X^2+(Y-1)^2\}$　……①

(1)　$\mathrm{Q}(T,\ 1)$ のとき ① より $x=T$，$y=1$ として

$$h^2\{(X-T)^2+(Y-1)^2\}=g^2\{X^2+(Y-1)^2\}$$

$$(h^2-g^2)X^2-2h^2TX+(h^2-g^2)(Y-1)^2+h^2T^2=0$$

$h\neq g$ であるから

$$\left(X-\frac{h^2T}{h^2-g^2}\right)^2+(Y-1)^2=\frac{h^4T^2-h^2T^2(h^2-g^2)}{(h^2-g^2)^2}$$

$$\therefore\quad \left(X-\frac{h^2T}{h^2-g^2}\right)^2+(Y-1)^2=\frac{h^2g^2T^2}{(h^2-g^2)^2}$$

$h>0$，$g>0$，$T>0$ より，点 P は中心 $\left(\dfrac{h^2T}{h^2-g^2},\ 1\right)$，半径 $\dfrac{hgT}{|h^2-g^2|}$ の円周上にある．

$\boxed{\text{別解}}$　点 P の軌跡を図形的に求めることもできる．

$\dfrac{h}{\mathrm{PA}}=\dfrac{g}{\mathrm{PQ}}$ より　　$\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{AP}}=\dfrac{g}{h}$

$h\neq g$ であるから，アポロニウスの円により，点 P は線分 AQ を $h:g$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円を描く．

$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(T,\ 1)$ のとき，線分 AQ を

$h:g$ に内分する点は $\left(\dfrac{hT}{h+g},\ 1\right)$，　$h:g$ に外分する点は $\left(\dfrac{hT}{h-g},\ 1\right)$

であり，これらの中点が点 P が描く円の中心であるから

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{hT}{h+g}+\frac{hT}{h-g}\right),\ 1\right) \qquad \therefore\quad \left(\frac{h^2T}{h^2-g^2},\ 1\right)$$

また，この点と $\left(\dfrac{hT}{h+g},\ 1\right)$ との距離が半径であるから　　$\left|\dfrac{h^2T}{h^2-g^2}-\dfrac{hT}{h+g}\right|=\dfrac{hgT}{|h^2-g^2|}$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(2)　① において $X=0$ とすると

$$h^2\{x^2+(Y-y)^2\}=g^2(Y-1)^2$$

$$(h^2-g^2)Y^2-2(yh^2-g^2)Y+h^2(x^2+y^2)-g^2=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$h \neq g$ より $h^2-g^2 \neq 0$ であるから，これは Y の 2 次方程式である．これを満たす Y がただ 1 つ存在するのは，② の判別式 D_Y について $D_Y=0$ となるときである．

$$\begin{aligned}\frac{D_Y}{4}&=(yh^2-g^2)^2-(h^2-g^2)\{h^2(x^2+y^2)-g^2\}\\&=y^2h^4+g^4-2yh^2g^2-(h^4x^2+h^4y^2-h^2g^2x^2-h^2g^2y^2-h^2g^2+g^4)\\&=-2yh^2g^2-h^4x^2+h^2g^2x^2+h^2g^2y^2+h^2g^2\\&=h^2x^2(g^2-h^2)+h^2g^2(y^2-2y+1)\\&=h^2x^2(g^2-h^2)+h^2g^2(y-1)^2\end{aligned}$$

$h^2x^2 \geqq 0$，$h^2g^2(y-1)^2 \geqq 0$ であるから，$\dfrac{D_Y}{4}=0$ が成り立つためには

$$g^2-h^2 \leqq 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{g<h} \quad (\because\ h \neq g)$$

となる必要がある．

このとき $\dfrac{D_Y}{4}=0$ より　　$x^2(g^2-h^2)+g^2(y-1)^2=0$

$$(y-1)^2=\frac{h^2-g^2}{g^2}x^2$$

$$y-1=\pm\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=\pm\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1}$$

よって点 Q $(x,\ y)$ は，この 2 直線のいずれかの上にある．

(3)　① において $Y=0$ のとき

$$h^2\{(X-x)^2+y^2\}=g^2(X^2+1)$$

$$(h^2-g^2)X^2-2h^2xX+h^2(x^2+y^2)-g^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

$h \neq g$ より $h^2-g^2 \neq 0$ であるから，これは X の 2 次方程式である．これを満たす X がただ 1 つ存在するのは，③ の判別式 D_X について $D_X=0$ となるときである．

$$\begin{aligned}\frac{D_X}{4}&=h^4x^2-(h^2-g^2)\{h^2(x^2+y^2)-g^2\}\\&=h^4x^2-(h^4x^2+h^4y^2-h^2g^2-h^2g^2x^2-h^2g^2y^2+g^4)\\&=h^2g^2x^2-h^2(h^2-g^2)y^2+g^2(h^2-g^2)\end{aligned}$$

$\dfrac{D_X}{4}=0$ のとき，C の方程式は　　$h^2g^2x^2-h^2(h^2-g^2)y^2=g^2(g^2-h^2)$

$g \neq h$ より $g^2-h^2 \neq 0$ であるから　　$\boldsymbol{\dfrac{h^2}{g^2-h^2}}x^2+0\cdot x+\boldsymbol{\dfrac{h^2}{g^2}}y^2+0\cdot y=1$

$g>h$ とすると　$\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{\sqrt{g^2-h^2}}{h}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{g}{h}\right)^2}=1$

$\dfrac{\sqrt{g^2-h^2}}{h}<\dfrac{g}{h}$ であり，$\left(\dfrac{g}{h}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{g^2-h^2}}{h}\right)=1$ であるから，$g>h$ のとき

曲線 C は楕円であり，2 つの焦点の座標は $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$ である．

$g>h$ が成り立たないとき，つまり $g<h$ が成り立つとき，曲線 C の方程式は

$$-\frac{h^2}{h^2-g^2}x^2+\frac{h^2}{g^2}y^2=1$$

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{\sqrt{h^2-g^2}}{h}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{g}{h}\right)^2}=-1$$

と変形できるから，曲線 C は双曲線を表し，$\left(\dfrac{\sqrt{h^2-g^2}}{h}\right)^2+\left(\dfrac{g}{h}\right)^2=1$ であるから，

その焦点の座標は $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$ である．

また，曲線 C が直角双曲線となるのは，x^2，y^2 の係数が等しいときであるから，

$$\frac{\dfrac{g}{h}}{\dfrac{\sqrt{h^2-g^2}}{h}}=\frac{g}{\sqrt{h^2-g^2}}=1$$

$$g^2=h^2-g^2 \qquad \therefore\ \frac{h^2}{g^2}=2$$

$h>0$，$g>0$ であるから　$\dfrac{h}{g}=\sqrt{2}$

［IV］

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とおくと　　$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，　$f''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

このとき，次の式が成り立つ．

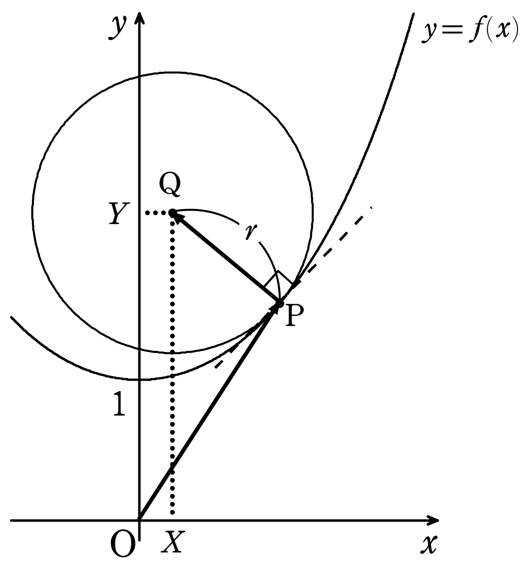
$$f''(x)=f(x) \quad \cdots\cdots①$$

$$1+\{f'(x)\}^2=1+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}=\{f(x)\}^2 \quad \cdots\cdots②$$

また，相加・相乗平均の不等式により　　$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\geqq\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=1$

等号が成り立つのは $e^x=e^{-x}$，つまり $x=0$ のときのみであるから，$x>0$ のとき

$$f(x)>1 \quad \cdots\cdots③$$



点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線の方向ベクトルは

$$(1,\ f'(t))$$

これに垂直なベクトルを $\vec{v}$ とおくと

$$\vec{v}=(\pm f'(t),\ \mp 1)\ (複号同順)$$

$\vec{v}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であり，$X<t$ であることと

$$|\vec{v}|=\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}=f(t) \quad (\because\ ②)$$

であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{r}{f(t)}(-f'(t),\ 1)$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t,\ f(t))+\dfrac{r}{f(t)}(-f'(t),\ 1)$

$$=\left(t-\frac{r(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}},\ \frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{2r}{e^t+e^{-t}}\right)$$

したがって　　$\boldsymbol{X=t-\dfrac{r(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}}}$，　$\boldsymbol{Y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}+\dfrac{2r}{e^t+e^{-t}}}$

$\boxed{別解1}$　円と曲線が点 P で接することから，X，Yの連立方程式を導いてもよい．

点 P における接線の傾きは $f'(t)$ であり，この接線と直線 PQ が直交することから，

$$f'(t)\times\frac{Y-f(t)}{X-t}=-1 \qquad \therefore\quad f'(t)(Y-f(t))+X-t=0 \quad \cdots\cdots④$$

また，点 P は中心 $(X,\ Y)$，半径 r の円周上にあるから　　$(t-X)^2+(f(t)-Y)^2=r^2 \quad \cdots\cdots⑤$

④ より　　$t-X=f'(t)(Y-f(t))$

⑤ に代入すると　　$\{f'(t)\}^2(Y-f(t))^2+(Y-f(t))^2=r^2$

② より　　$\{f(t)\}^2(Y-f(t))^2=r^2$

$f(t)>0$，$Y-f(t)>0$，$r>0$ であるから　　$f(t)(Y-f(t))=r$

よって　　$Y=f(t)+\dfrac{r}{f(t)}=\boldsymbol{\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}+\dfrac{2r}{e^t+e^{-t}}}$

これを ④ に代入すると　　$X=t-f'(t)\left\{f(t)+\dfrac{r}{f(t)}-f(t)\right\}=t-\dfrac{rf'(t)}{f(t)}=\boldsymbol{t-\dfrac{r(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}}}$

$\boxed{別解1}$終わり

$X(t)=t-\dfrac{r(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}}>0$ のとき　$\dfrac{t(e^t+e^{-t})}{e^t-e^{-t}}>r$

$g(t)=\dfrac{t(e^t+e^{-t})}{e^t-e^{-t}}=\dfrac{tf(t)}{f'(t)}$ とおくと　$g'(t)=\dfrac{\{f(t)+tf'(t)\}\cdot f'(t)-tf(t)\cdot f''(t)}{\{f'(t)\}^2}$

①，② より　$g'(t)=\dfrac{f(t)f'(t)+t[\{f(t)\}^2-1]-t\{f(t)\}^2}{\{f'(t)\}^2}=\dfrac{f(t)f'(t)-t}{\{f'(t)\}^2}$

さらに $h(t)=f(t)f'(t)-t$ とおくと，①，② より

$$h'(t)=\{f'(t)\}^2+f(t)f''(t)-1=\{f(t)\}^2-1+\{f(t)\}^2-1=2\{f(t)\}^2-2$$
$$>2\cdot1^2-2=0 \quad (\because ③)$$

よって，$t>0$ のとき $h(t)$ は単調に増加し，$h(0)=0$ であるから　$h(t)>0$

したがって，$g'(t)>0$が成り立つから，$t>0$ のとき $g(t)$ も単調に増加し，

$$\lim_{t\to+0} g(t)=\lim_{t\to+0}\frac{t(e^t+e^{-t})}{e^t-e^{-t}}=\lim_{t\to+0}\frac{t(e^{2t}+1)}{e^{2t}-1}=\lim_{t\to+0}\frac{t}{e^t-1}\cdot\frac{e^{2t}+1}{e^t+1}=1$$

であることから $g(t)>1$ となって，$g(t)>r$ となる r の必要十分条件は　$\boldsymbol{0<r\leqq 1}$

$\boxed{\text{別解２}}$　r を分離せずに解くこともできる．

$X(t)=t-\dfrac{r(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}}$ であるから

$$X'(t)=1-r\cdot\frac{(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}=1-\frac{4r}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{(e^t+e^{-t})^2-4r}{(e^t+e^{-t})^2}$$

$0<r\leqq1$ のとき　$(e^t+e^{-t})^2-4r\geqq\left(2\sqrt{e^t\cdot e^{-t}}\right)^2-4\cdot1=0$

よって $X'(t)$ は単調に増加し，$X(0)=0$ であるから，すべての $t>0$ に対して

$X(t)>0$ が成り立つ．

また，$r>1$ のとき　$(e^t+e^{-t})^2-4r=(e^t+e^{-t}+2\sqrt{r})(e^t+e^{-t}-2\sqrt{r})$

$X'(t)=0$ となるとき　$e^t+e^{-t}=2\sqrt{r}$

$$(e^t)^2-2\sqrt{r}\,e^t+1=0$$
$$e^t=\sqrt{r}\pm\sqrt{r-1}$$

$r>1$ であるから　$\sqrt{r}-\sqrt{r-1}<1<\sqrt{r}+\sqrt{r-1}$

$t>0$ のとき $e^t>1$ であるから　$e^t=\sqrt{r}+\sqrt{r-1}$　　$\therefore\ t=\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$

よって $X(t)$ の増減は次のようになる．

t	0		$\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$	
$X'(t)$		$-$	0	$+$
$X(t)$		↘		↗

$X(0)=0$ であるから，$0<t<\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$ のとき $X(t)<0$ となり不適である．

以上より，すべての $t>0$ において $X(t)>0$ が成り立つ条件は　$\boldsymbol{0<r\leqq 1}$

$\boxed{\text{別解２}}$終わり

$Y(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}+\dfrac{2r}{e^t+e^{-t}}$ であるから， $r>1$ のとき 相加･相乗平均の不等式により

$$Y(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{2r}{e^t+e^{-t}}\geqq 2\sqrt{\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{2r}{e^t+e^{-t}}}=2\sqrt{r}$$

等号が成り立つとき　$\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=\dfrac{2r}{e^t+e^{-t}}$　　$\therefore\ (e^t+e^{-t})^2=4r$

$e^t+e^{-t}>0$ であるから　$e^t+e^{-t}=2\sqrt{r}$

$$(e^t)^2-2\sqrt{r}e^t+1=0 \qquad \therefore\ e^t=\sqrt{r}\pm\sqrt{r-1}$$

$t>0$ のとき $e^t>1$ であるから　$e^t=\sqrt{r}+\sqrt{r-1}$　　$\therefore\ t=\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$

よって $Y(t)$ は， $t=\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$ のとき，最小値 $2\sqrt{r}$ をとる.

また $0<r\leqq 1$ のとき

$$X'(t)=1-r\cdot\frac{(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}=1-\frac{4r}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{(e^t+e^{-t})^2-4r}{(e^t+e^{-t})^2}$$

$$Y'(t)=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})-2r\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{(e^t-e^{-t})\{(e^t+e^{-t})^2-4r\}}{2(e^t+e^{-t})^2}$$

であるから　$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{Y'(t)}{X'(t)}=\dfrac{\dfrac{(e^t-e^{-t})\{(e^t+e^{-t})^2-4r\}}{2(e^t+e^{-t})^2}}{\dfrac{(e^t+e^{-t})^2-4r}{(e^t+e^{-t})^2}}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=f'(t)$

よって　$\left(\dfrac{dY}{dX}\right)^2+1=\{f'(t)\}^2+1=\{f(t)\}^2$　……⑥

$Y=f(t)+\dfrac{r}{f(t)}$ であるから　$\{f(t)\}^2-Yf(t)+r=0$　……⑦

ここで $Y'(t)$ について， $t>0$，$0<r\leqq 1$ のとき

$$e^t-e^{-t}>0,\ (e^t+e^{-t})^2-4r>(2\sqrt{e^t\cdot e^{-t}})^2-4\cdot 1=0$$

が成り立つから， $Y'(t)>0$ より， Y は単調に増加する.

よって Y が最小となるのは $t=0$ のときで，その値は　$Y=1+r$

したがって $t>0$ のとき　$Y>1+r$

これを用いると $f(t)$ の方程式 ⑦ の左辺について

$f(t)=1$ のとき　$1-Y+r<0$

となるから，方程式 ⑦ は異なる 2 つの実数解をもち，大きい方は 1 より大きく，小さい方は 1 より小さい.

⑦ を $f(t)$ について解くと　$f(t)=\dfrac{Y\pm\sqrt{Y^2-4r}}{2}$

$\dfrac{Y-\sqrt{Y^2-4r}}{2}<\dfrac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}$ であるから， $f(t)>1$ を満たすのは　$f(t)=\dfrac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}$

したがって ⑥ より　$\left(\dfrac{dY}{dX}\right)^2+1=\left(\dfrac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}\right)^2$