2021 年度　杏林大学

【　講　評　】

例年の大問数 4 題から 1 題減少し，大問 3 題で出題された．問題Ⅰは易しい確率の問題であるが，最後の設問が条件付き確率に関する問題であることに注意が必要である．問題Ⅱは標準レベルの図形と方程式，積分法（数Ⅱ）の問題であるが，△ABC が直角二等辺三角形であることや，放物線と円の 2 つの共有点の y 座標が等しいことから，放物線の軸の位置を見抜くなど，図形的な考察をなるべく多く取り入れて計算量を省略できたかどうかがポイントとなる．問題Ⅲは数列，対数関数，極限が融合された杏林大学らしい問題である．各設問の関連はあまりないが，問題文から要点を把握しながら解く力が要求されるため，実力差が現れやすい問題である．全体的には分量が減少し，問題の難易度も若干下がっているため，例年より得点しやすい試験であった．全体で 7 割弱の得点は取りたい．

【　解　答　】

Ⅰ．確率（数学 A）【易】

(a)　ア：1,　イ：6,　ウ：2,　エ：9,　オ：1,　カ：3
(b)　キ：2,　ク：4,　ケ：4,　コ：0,　サ：3,　シ：8,　ス：5
(c)　セ：3,　ソ：1,　タ：3,　チ：9,　ツ：7,　テ：6

Ⅱ．図形と方程式（数Ⅱ）／微分法・積分法（数Ⅱ）【標準】

ア：5,　イ：3,　ウ：1,　エ：5,　オ：2,　カ：2,　キ：5,
ク：5,　ケ：2,　コ：1,　サ：2,　シ：3,　ス：1,　セ：2,
ソ：1,　タ：8,　チ：3,　ツ：4,　テ：3,　ト：9,　ナ：8,
ニ：1,　ヌ：6,　ネ：0,　ノ：3

Ⅲ．対数関数（数Ⅱ）／数列の極限（数Ⅲ）／数列（数 B）【標準】

(a)　ア：⓪,　イ：⑦,　ウ：⓷,　エ：⓶,　オ：3,　カ：－,　キ：1,
(b)　ク：⓺,　ケ：4,　コ：7,　サ：－,　シ：3,　ス：9,　セ：1,
ソ：9,　タ：3,　チ：1,　ツ：2,　テ：－,　ト：3,　ナ：1,
(c)　ニ：0,　ヌ：5,　ネ：0

【　解　説　】

［Ｉ］

(a)　玉の取り出し方の総数は ${}_9\mathrm{C}_2$ 通り．

黒玉が 2 個取り出される確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{6}$

赤玉 1 個と黒玉 1 個が取り出される確率は　$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{9}$

黒玉 1 個と白玉 1 個が取り出される確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{3}$

(b)　16 個の玉が入った袋から，2 個の玉の取り出し方は ${}_{16}\mathrm{C}_2=120$

赤玉 1 個，黒玉 1 個を取り出す確率が $\dfrac{1}{5}$ であることから

$$\frac{1}{5}=\frac{{}_x\mathrm{C}_1\times{}_y\mathrm{C}_1}{120}=\frac{xy}{120}\qquad\therefore\quad xy=24\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

また，黒玉 1 個，白玉 1 個を取り出す確率が $\dfrac{1}{3}$ であるから，

$$\frac{1}{3}=\frac{{}_y\mathrm{C}_1\times{}_z\mathrm{C}_1}{120}=\frac{yz}{120}\qquad\therefore\quad yz=40\quad\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$x+y+z=16$ であるから　$xy+y^2+yz=16y$

①，② を代入すると　$24+y^2+40=16y$

$y^2-16y+64=0$

$(y-8)^2=0\qquad\therefore\quad y=8$

① に代入すると　$8x=24\qquad\therefore\quad x=3$

② に代入すると　$8z=40\qquad\therefore\quad z=5$

したがって，赤玉，黒玉，白玉の個数はそれぞれ 3 個，8 個，5 個である．

参考　x, y, z が 1 桁の整数であることに注目すると，次のように解くこともできる．

②÷① より　$\dfrac{yz}{xy}=\dfrac{40}{24}\qquad\therefore\quad \dfrac{z}{x}=\dfrac{5}{3}$

x，y が 1 桁の整数であることに注意すると　$x=3$，$z=5$

① に代入すると　$3y=24\qquad\therefore\quad y=8$

これらは $x+y+z=16$ を満たす．

よって，赤玉，黒玉，白玉の個数はそれぞれ 3 個，8 個，5 個である．

参考終わり

(c)　3 個の玉の取り出し方は ${}_{15}\mathrm{C}_3$ 通りである．

赤玉，黒玉，白玉を 1 個ずつ取り出す確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{13}$

取り出された 3 個の玉の色が 2 種類である事象を X，取り出された 3 個の玉に赤玉が 2 個入っている事象を Y とすると，求める確率は条件付き確率であり，

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}$$

である．

取り出された玉の色が 2 種類であるのは，次の 3 通りである．

赤玉を 2 個取り出し，黒玉または白玉を 1 個取り出す確率　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_{12}\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}$

黒玉を 2 個取り出し，赤玉または白玉を 1 個取り出す確率　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_{10}\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}$

白玉を 2 個取り出し，赤玉または黒玉を 1 個取り出す確率　$\dfrac{{}_7\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}$

よって　$P(X)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_{12}\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2\times{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}$，$P(X\cap Y)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_{12}\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}$

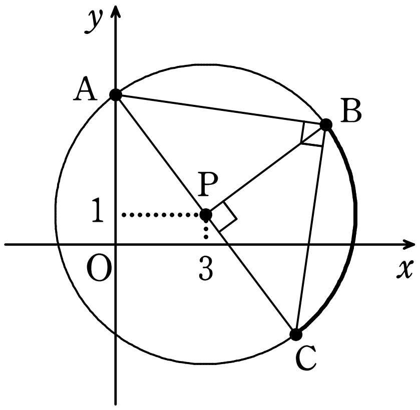
したがって求める確率は

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_{12}\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}}{\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_{12}\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2\times{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}}=\frac{9}{76}$$

［Ⅱ］

AB$=5\sqrt{2}$， BC$=5\sqrt{2}$， AC$=10$ であるから　　$AB^2+BC^2=AC^2$

3 点 A，B，C を通る円 S は△ABC の外接円であり，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$ より AC を直径とする円であるから，円 S の半径は 5，中心は $(3,\ 1)$ である．



P$(3,\ 1)$ とおくと　　$\angle BPC=\dfrac{\pi}{2}$

よって， 2 点 B，C を結ぶ短い方の弧の長さは　　$\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 5=\dfrac{5}{2}\pi$

また，△ABC の面積は　　$\dfrac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}=25$

△ABC の内接円の半径を r とすると，面積から

$$25=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$$

$$50=r(5\sqrt{2}+5\sqrt{2}+10)\qquad \therefore\quad r=\frac{5}{\sqrt{2}+1}=5(\sqrt{2}-1)$$

$\boxed{\text{別解１}}$　△ABC が二等辺三角形であることに気付けなければ，円の方程式を求めればよい．

円 S の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$　……①　とおく．

A$(0,\ 5)$，B$(7,\ 4)$，C$(6,\ -3)$ を通るから

$25+5m+n=0$　……②，$65+7l+4m+n=0$　……③，$45+6l-3m+n=0$　……④

③－② より　　$40+7l-m=0$　………⑤

③－④ より　　$20+l+7m=0$　………⑥

⑤×7＋⑥ より　　$300+50l=0$　　$\therefore\quad l=-6$

これを ⑤ に代入すると　　$40-42-m=0$　　$\therefore\quad m=-2$

これを ② に代入すると　　$25-10+n=0$　　$\therefore\quad n=-15$

よって ① より円 S の方程式は　　$x^2+y^2-6x-2y-15=0$　　$\therefore\quad (x-3)^2+(y-1)^2=5^2$

したがって円 S の半径は 5，中心は $(3,\ 1)$ である．

$\boxed{\text{別解１}}$終わり

$\boxed{\text{別解２}}$　円 S は△ABC の外接円であるから，各辺の垂直二等分線により外心を求めてもよい．

直線 AB の傾きは $-\dfrac{1}{7}$ であるから，線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y-\frac{9}{2}=7\left(x-\frac{7}{2}\right)\qquad \therefore\quad y=7x-20\quad ………①$$

直線 AC の傾きは $-\dfrac{4}{3}$ であるから，線分 AC の垂直二等分線の方程式は

$$y-1=\frac{3}{4}(x-3)\qquad \therefore\quad y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}\quad ………②$$

①，② を連立させて　　$28x-80=3x-5$　　$\therefore\quad x=3$

① に代入すると　　$y=7\cdot 3-20=1$

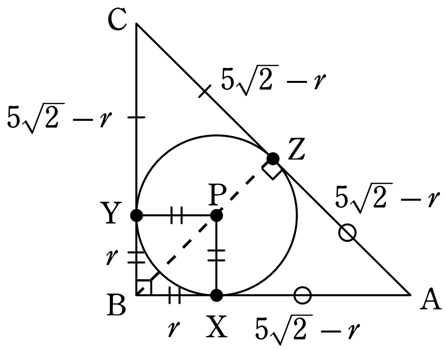
よって円 S の中心は $(3,\ 1)$ である．

この点と点A$(0,\ 5)$ との距離が円 S の半径に等しいから　　$\sqrt{(0-3)^2+(5-1)^2}=5$

$\boxed{\text{別解２}}$終わり

$\boxed{\text{参考}}$ △ABC は直角（二等辺）三角形であるから，次のように内接円の半径を求めてもよい．

内接円の半径を r とする．



内接円と辺 AB，BC，CAとの接点を X，Y，Z とすると，

$$\mathrm{BX}=\mathrm{BY}=r,$$

$$\mathrm{AX}=\mathrm{AZ}=5\sqrt{2}-r,$$

$$\mathrm{CY}=\mathrm{CZ}=5\sqrt{2}-r$$

よって AC＝AZ＋CZ より

$$(5\sqrt{2}-r)+(5\sqrt{2}-r)=10$$

$$2r=10(\sqrt{2}-1) \qquad \therefore \quad r=5(\sqrt{2}-1)$$

また，△BXP は直角二等辺三角形であるから， BZ＝BP＋PZ より

$$\sqrt{2}\,r+r=5$$

$$(\sqrt{2}+1)r=5 \qquad \therefore \quad r=\frac{5}{\sqrt{2}+1}=5(\sqrt{2}-1)$$

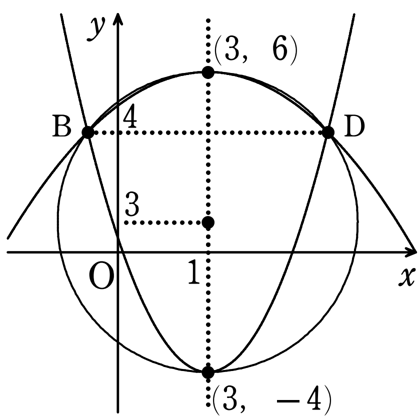
とすることもできる．

$\boxed{\text{参考}}$終わり

円 S 上の点 B$(7,\ 4)$，D$(-1,\ 4)$ は y 座標が等しいから，この 2 点を通る放物線の軸の方程式は

$$x=\frac{7+(-1)}{2}=3$$

これは円 S の中心を通るから，円 S と 3 つの点を共有する放物線は，円 S 上の点 $(3,\ 6)$ または $(3,\ -4)$ で接する．



$(3,\ -4)$ で接するとき，この点が放物線の頂点であるから

$$y=a(x-3)^2-4 \quad (a>0)$$

とおける．D$(-1,\ 4)$ を通ることから

$$4=a(-1-3)^2-4 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{2}$$

よって　　$y=\dfrac{1}{2}(x-3)^2-4=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{1}{2}$

$(3,\ 6)$ で接するとき，この点が放物線の頂点であるから

$$y=b(x-3)^2+6 \quad (b<0)$$

とおける．D$(-1,\ 4)$ を通ることから

$$4=b(-1-3)^2+6 \qquad \therefore \quad b=-\frac{1}{8}$$

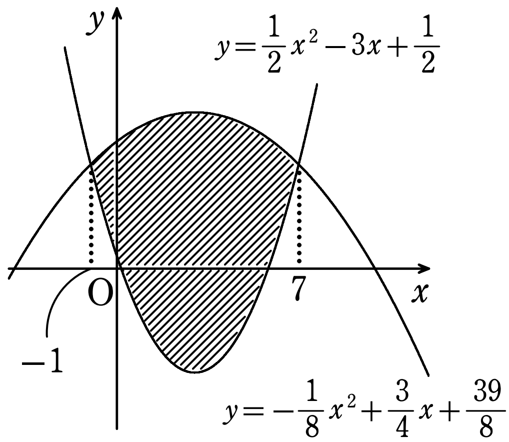
よって　　$y=-\dfrac{1}{8}(x-3)^2+6=-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{39}{8}$

この 2 つの放物線で囲まれた部分の面積は

$$\int_{-1}^{7}\left\{\left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{39}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\frac{5}{8}\int_{-1}^{7}(x+1)(x-7)\,dx$$

$$=-\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\{7-(-1)\}^3=\mathbf{\frac{160}{3}}$$



$\boxed{\text{参考}}$

$x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ で交わる 2 つの放物線 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$，　$y=a_2x^2+b_2x+c_2$ で囲まれた部分の面積は

$$\frac{|a_1-a_2|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

となる．これを用いれば

$$S=\frac{\left|\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{8}\right)\right|}{6}\{7-(-1)\}^3=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{6}\cdot 8^3=\mathbf{\frac{160}{3}}$$

となる．

$\boxed{\text{参考}}$終わり

［Ⅲ］

(a)　$f(x)=\log x$ であるから，正の実数 x，y および実数 k について

$$f(x)+f(y)=\log x+\log y=\log xy=f(xy)$$

$$f(x)-f(y)=\log x-\log y=\log\frac{x}{y}=f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$kf(x)=k\log x=\log x^k=f(x^k)$$

が成り立つことに注意すると　$\dfrac{f(s)+f(t)+f(u)}{3}=\dfrac{1}{3}f(stu)=f\left((stu)^{\frac{1}{3}}\right)$

であるから，重心 G の座標は　$\mathrm{G}\left(\dfrac{s+t+u}{3},\ f\left((stu)^{\frac{1}{3}}\right)\right)$　（❷，❼）

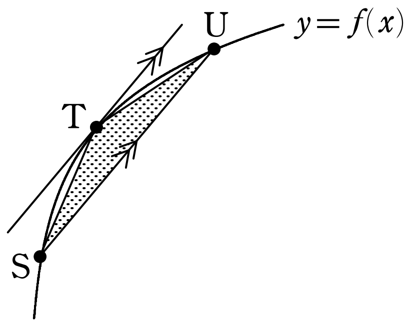
また，$y=f(x)=\log x$ について　$f'(x)=\dfrac{1}{x}>0$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$

よって $y=f(x)$ は上に凸で単調増加である．（❸）

このことから，三角形の 3 辺は $y<f(x)$ の範囲に存在する．また，重心は三角形の内部に存在するため，重心 G は $x>0$，$y<f(x)$（❷）の範囲に存在する．

S$(s,\ f(s))$，T$(t,\ f(t))$，U$(u,\ f(u))$ $(s<t<u)$ とすると，

△STU の面積が最大となるのは，T における接線が直線 SU と平行になるときである．



直線 SU の傾きは　$\dfrac{f(u)-f(s)}{u-s}=\dfrac{1}{e^4-e^3}\cdot f\left(\dfrac{e^4}{e^3}\right)=\dfrac{1}{e^4-e^3}$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから　$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{e^4-e^3}$　$\therefore$　$t=e^3(-1+e)$

(b)　$f(a_n)$ が公差 -3 の等差数列であるとき　$f(a_{n+1})-f(a_n)=-3$

$$f\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\log\frac{a_{n+1}}{a_n}=-3 \qquad \therefore\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$$

よって数列 $\{a_n\}$ は，公比 $\dfrac{1}{e^3}$ の等比数列である（❻）．

$r=\dfrac{1}{e^3}$ とおくと　$\log_b(a_2a_{2021})-\log_b a_1{}^2=\log_b\left(\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_{2021}}{a_1}\right)=\log_b(r\cdot r^{2020})=\log_b r^{2021}$

$b=\dfrac{a_{44}}{a_1}=r^{43}$，$2021=43\times47$ であるから　$\log_b r^{2021}=\log_{r^{43}}(r^{43})^{47}=47$

数列 $\{f(a_n)\}$ は公差 -3 の等差数列であるから，$f(a_1)=a$ とすると

$$f(a_n)=a-3(n-1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}f(a_k)=0$ を満たすとき　$\dfrac{1}{2}(a+a-12)\cdot5=0$　$\therefore$　$a=6$

よって　$f(a_n)=6-3(n-1)=-3n+9$

また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}f(a_k)=f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+f(a_5)=f(a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5)=0$

$\therefore$　$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5=1$

数列 $\{a_n\}$ は等比数列であり，公比について　　$0<\dfrac{1}{e^3}<1$

よって無限等比級数は収束し，$f(a_1)=6$ より $a_1=e^6$ であるから，その和は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{e^6}{1-\dfrac{1}{e^3}}=\frac{e^9}{e^3-1}$$

$\boxed{参考１}$

　試験の前に年度を素因数分解する習慣をつけておきたい．そうすれば

$$2021=43\times 47$$

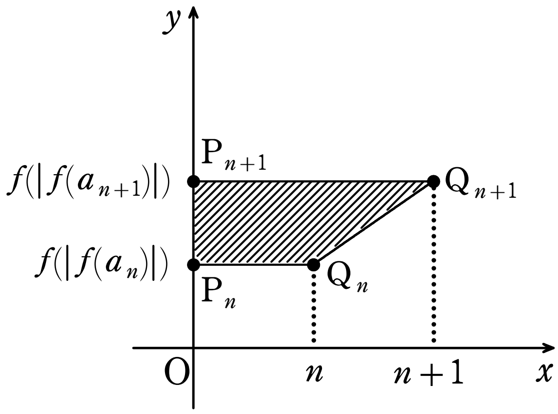
にすぐ気付けるだろう．

$\boxed{参考１}$終わり

$n\geqq 5$ のとき　　$f(a_n)=-3n+9<0$　　　$\therefore\ \ |f(a_n)|=3n-9$

$|f(a_n)|<|f(a_{n+1})|$ であるから　　$f(|f(a_n)|)<f(|f(a_{n+1})|)$

よって台形 $P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}$ の面積 S_n は



$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\{n+(n+1)\}\times\{f(|f(a_{n+1})|)-f(|f(a_n)|)\}\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\times f\left(\left|\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)}\right|\right)\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{3n-6}{3n-9}\right)\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n-3+1}{n-3}\right)\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{-3+n}\right)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n-3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\log\left\{\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^{n-3}\right\}^{\frac{1}{n-3}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(n-3)}\cdot\log\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{2\left(1-\dfrac{3}{n}\right)}\cdot\log\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^{n-3}\\&=\frac{2}{2}\cdot\log e=1\end{aligned}$$

が成り立つ．

(c)　$U_m = T_{100} - T_m - T_{100-m}$ とおく.

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots\cdots + f(n) = f(n\,!)$$

$T_0 = 0$ であるから，これは $n = 0$ のときも成り立つ.

$$U_m = f(100\,!) - f(m\,!) - f((100-m)\,!)$$

よって

$$\begin{aligned} U_{m+1} - U_m &= f(100\,!) - f((m+1)\,!) - f((99-m)\,!) - \{f(100\,!) - f(m\,!) - f((100-m)\,!)\} \\ &= f\left(\frac{m\,!}{(m+1)\,!} \cdot \frac{(100-m)\,!}{(99-m)\,!}\right) \\ &= f\left(\frac{100-m}{m+1}\right) = \log\left(\frac{100-m}{m+1}\right) \end{aligned}$$

$\log\left(\dfrac{100-m}{m+1}\right) > 0$ のとき　　$100 - m > m + 1$　　$\therefore$　$m < \dfrac{99}{2} = 49.5$

よって　　$U_0 < U_1 < U_2 < \cdots\cdots < U_{49} < U_{50} > U_{51} > U_{52} > \cdots\cdots > U_{100}$

$$U_0 = f(100\,!) - f(0\,!) - f(100\,!) = f(1) = 0,$$

$$U_{100} = f(100\,!) - f(100\,!) - f(0\,!) = f(1) = 0,$$

したがって，U_m は $m = 0$，100 のとき最小値 **0** をとる.

また，U_m が最大となるのは $m = \mathbf{50}$ のときである.

参考２　U_m が最大，最小となるときは，次のようにとらえることもできる.

$$U_m = f\left(\frac{100\,!}{m\,!(100-m)\,!}\right) = f({}_{100}\mathrm{C}_m)$$

$f(x)$ は単調増加であるから，${}_{100}\mathrm{C}_m$ が最大，最小となるとき $f({}_{100}\mathrm{C}_m)$ も最大，最小となる.

パスカルの三角形より，数列 $\{{}_{100}\mathrm{C}_m\}$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 100)$ は中央の項が一番大きいから，

${}_{100}\mathrm{C}_m$ が最大となるのは $m = 50$，${}_{100}\mathrm{C}_m$ が最小となるのは $m = 0$，100 であることがわかる.

参考２終わり