解答速報 数学

2021 年度　日本医科大学　前期

【　講　評　】

大問は例年通り 4 題で形式に変化はなかった. 昨年同様, 手をつけやすい問題が多かった反面, 計算量が多く, 得点しづらいものが多い．以下，大問ごとに特徴を述べる.

［Ⅰ］反復試行に関する確率の問題である．試行が単純な上に，計算も容易であるため，確実に得点したい問題である.

［Ⅱ］問 1，問 2 は簡単な問題であるから落とせない．問 3 は絶対値のついた 2 次関数のグラフと直線の共有点の個数を考察する問題である．典型問題のように見えるが，直線が定点を通るものや，傾きが一定であるものでないため，図形的な考察が難しい．記述式の問題であることから，直線と曲線の方程式を連立させて得られる共有点の x 座標に関する方程式の実数解の個数を数えていくのが無難だろう.

［Ⅲ］数Ⅱの微分法で頻出な，放物線と直線（接線）で囲まれた部分の面積に関する問題である．数Ⅱの問題とは異なり放物線の軸が x 軸となっていることや，文字が多い点などに惑わされずに，問 1，問 2 は確実に得点したい．答えのみを要求されているので，1/6 公式や 1/12 公式を用いると良いだろう．問 3 の値域は逆像法を用いることになるので，実力差が出やすい問題である.

［Ⅳ］数Ⅲの微分法，積分法に関する総合的な問題である．問 1 は共有点を 1 つ持つときが接するときであることに気付ければ容易である．問 2 は y 軸周りの回転体の体積であるが，逆関数を用いると計算が煩雑になるため，バームクーヘン分割を用いると良いだろう．それでも計算は大変であるため，得点できた人は少ないだろう．問 3 は問 2 までと関係がない不等式証明の典型問題であるから，ここは確実に得点したい．問 4 は問 3 の不等式を用いてはさみうちの原理により極限を求める問題であり，日本医科大受験者であれば対策はできていると思うが，問 2 に不備があると正解が得られないため，得点できた人は少ないだろう.

全体的な難易度は昨年度と同程度である．全体で 6 割程度の得点をしたい.

【　解　答　】

［Ⅰ］確率（数A）【やや易】

問 1　$a=2$，$b=0$，$c=-2$

問 2　(1) $\dfrac{5}{16}$　(2) $\dfrac{155}{512}$　(3) $\dfrac{15}{256}$

［Ⅱ］2 次関数（数Ⅰ）／微分法（数Ⅱ）【やや難】

問 1　$a=0$

問 2　$y=5x+1$

問 3　$-\dfrac{7}{2}<a<0$，$0<a<1$ のとき $N(a)=3$，　$a=0$，1，$-\dfrac{7}{2}$ のとき $N(a)=2$，

$a<-\dfrac{7}{2}$，$1<a$ のとき $N(a)=1$

［Ⅲ］積分法（数Ⅱ）／2 次曲線（数Ⅲ）【標準】

問 1　$S=\dfrac{1}{24p}(\beta-\alpha)\{(\beta-\alpha)^2+3(\alpha\beta+4p^2)\}$

問 2　$T=\dfrac{1}{48p}(\beta-\alpha)^3$

問 3　$2-\sqrt{3}<-\dfrac{\beta}{\alpha}<2+\sqrt{3}$

［Ⅳ］微分法・積分法（数Ⅲ）【標準】

問 1　$a=2\alpha^2e^{\alpha^2}$，$b=e^{\alpha^2}(1-2\alpha^2\log\alpha)$

問 2　$V(\alpha)=\pi e^{\alpha^2}\left(\alpha^5\log\alpha-\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2+1-e^{\alpha^3-\alpha^2}\right)$

問 3　解説参照

問 4　$c=4$，極限値 $\dfrac{\pi}{2}$

【 解 説 】

［Ⅰ］

問１　試行 T を 6 回行って，X，Y，Z が表となった回数が 2，3，4 であるとき，X，Y，Z が裏となった回数は 4，3，2 である．これにより，動点 P は x 軸方向に -2，y 軸方向に 0，z 軸方向に 2 だけ平行移動し，原点に到達するから，動点 P が出発した定点 A は

$$A(2,\ 0,\ -2)$$

よって　　$\boldsymbol{a=2,\ b=0,\ c=-2}$

問２　硬貨 X，Y，Z の表と裏が出る確率は，いずれも $\frac{1}{2}$ である．

(1)　定点 A の z 座標は -2 であるから，試行 T を 5 回行った後に動点 P が $\{(x,\ y,\ z) \mid z=-1\}$ に属するのは，z 軸方向に 1 だけ平行移動するときである．これは硬貨 Z が表となる回数が 3，裏となる回数が 2 のときであるから，求める確率は

$$ {}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2)　試行 T を 5 回行ったとき，表裏の出る回数により，各座標について次の移動が起こる．

(表，裏)＝(5，0) のとき　座標軸の方向に $+5$ だけ平行移動する
(表，裏)＝(4，1) のとき　座標軸の方向に $+3$ だけ平行移動する
(表，裏)＝(3，2) のとき　座標軸の方向に $+1$ だけ平行移動する
(表，裏)＝(2，3) のとき　座標軸の方向に -1 だけ平行移動する
(表，裏)＝(1，4) のとき　座標軸の方向に -3 だけ平行移動する
(表，裏)＝(0，5) のとき　座標軸の方向に -5 だけ平行移動する

よって定点 A の y 座標は 0 であるから，定点 A から出発し，試行 T を 5 回行った後に点 P の y 座標がとり得る値は

$$y=5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5$$

試行 T を 5 回行った後に動点 P が集合 $\{(x,\ y,\ z) \mid\ \mid y=5,\ z=-1\}$ に属するのは，硬貨 Y の表の出る回数が 5，硬貨 Z の表の出る回数が 3，裏の出る回数が 2 のときであるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5\times{}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{512}$$

よって動点 P が集合 $\{(x,\ y,\ z) \mid y\leqq 4,\ z=-1\}$ に属する確率は

$$\frac{5}{16}-\frac{5}{512}=\boldsymbol{\frac{155}{512}}$$

(3)　定点Aの x 座標は2であるから，動点Pが集合 $\{(x,\ y,\ z) \mid x>2\}$ に属するのは，
硬貨Xの表の出る回数が3回以上となるときであり，その確率は

$$ {}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5C_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2} $$

また，定点Aの y 座標，z 座標の和は -2 であるから，動点Pが集合 $\{(x,\ y,\ z) \mid y+z=2\}$ に属するのは，硬貨Y，Zについて

(ア)　一方の表の出る回数が4で，もう一方の表の出る回数が3

(イ)　一方の表の出る回数が5で，もう一方の表の出る回数が2

となるときであるから，その確率は

$$ 2\times\left\{{}_5C_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\times{}_5C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5\times{}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} $$

$$ =(5\cdot10+10)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 $$

よって，動点Pが集合 $\{(x,\ y,\ z) \mid x>2,\ y+z=2\}$ に属する確率は

$$ \frac{1}{2}\times15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\mathbf{\frac{15}{256}} $$

$\boxed{\text{別解}}$　次のようにに考えてもよい．

定点Aの x 座標は2であるから，対称性より点Pが集合 $\{(x,\ y,\ z) \mid x>2\}$ に属する確率は $\frac{1}{2}$ である．

また，点Pが集合 $\{(x,\ y,\ z) \mid y+z>2\}$ に属するのは，y 軸方向の平行移動と z 軸方向の平行移動の合計が $+4$ となるときである．これは硬貨Y，Zを投げた合計10回のうち，表の出る回数が7のときであるから，その確率は

$$ {}_{10}C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 $$

よって，求める確率は

$$ \frac{1}{2}\times15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\mathbf{\frac{15}{256}} $$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

［Ⅱ］

問１　直線 L が原点を通るとき　　$0=5a\cdot 0+a^4$　　　$\therefore$　$a=0$

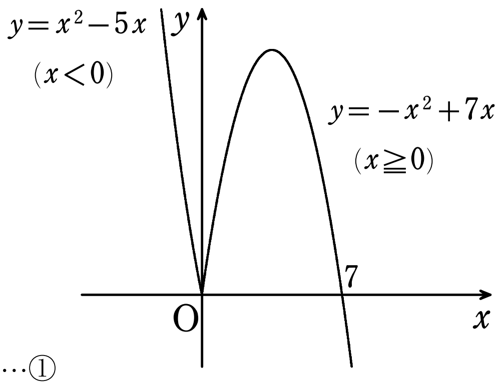
問２　曲線 C について　　$y=\begin{cases} x(6-x)+x & (x\geqq 0) \\ -x(6-x)+x & (x<0) \end{cases}=\begin{cases} -x^2+7x & (x\geqq 0) \\ x^2-5x & (x>0) \end{cases}$

$x\geqq 0$ のとき　　$y'=-2x+7$

よって曲線 C 上の点 $(1,\ 6)$ における C の接線の方程式は

$$y=5(x-1)+6 \qquad \therefore \quad y=5x+1$$

問３　曲線 C の概形は次のようになる．



（ⅰ）$a=0$ のとき

直線 L の方程式は　　$y=0$

これは曲線 C と 2 つの共有点をもつ．

以下，$a\fallingdotseq 0$ のときについて考える．

（ⅱ）直線 L の方程式と $y=x^2-5x\ (x<0)$ を連立させると

$$5ax+a^4=x^2-5x \qquad \therefore \quad x^2-5(a+1)x-a^4=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

① の左辺を $f(x)$ とすると　　$f(0)=-a^4<0$

よって，方程式 ① は負の解を 1 つだけもつから，直線 L と $y=x^2-5x\ (x<0)$ は共有点を 1 つだけもつ．

（ⅲ）直線 L の方程式と $y=-x^2+7x\ (x\geqq 0)$ を連立させると

$$5ax+a^4=-x^2+7x \qquad \therefore \quad x^2+(5a-7)x+a^4=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

② の左辺を $g(x)$ とおくと　　$g(0)=a^4>0$

また ② の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D&=(5a-7)^2-4a^4=\{(5a-7)-(2a^2)\}\{(5a-7)+2a^2\} \\ &=-(2a^2-5a+7)(2a^2+5a-7) \\ &=-\left\{2\left(a-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{8}\right\}(2a+7)(a-1) \end{aligned}$$

よって，方程式 ② の実数解の個数は

$a<-\dfrac{7}{2}$，$1<a$ のとき 0 個，$a=-\dfrac{7}{2}$，1 のとき 1 個，$-\dfrac{7}{2}<a<0$，$0<a<1$ のとき 2 個

である．実数解をもつとき，つまり $-\dfrac{7}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき，$y=g(x)$ の軸について

$$-\frac{1}{2}(5a-7)>0$$

が成り立つから，これが直線 L と $y=-x^2+7x\ (x\geqq 0)$ の共有点の個数である．

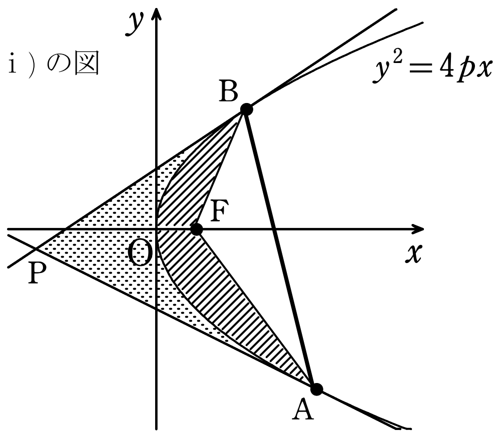
（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）をまとめると，共有点の個数 $N(a)$ は次のようになる．

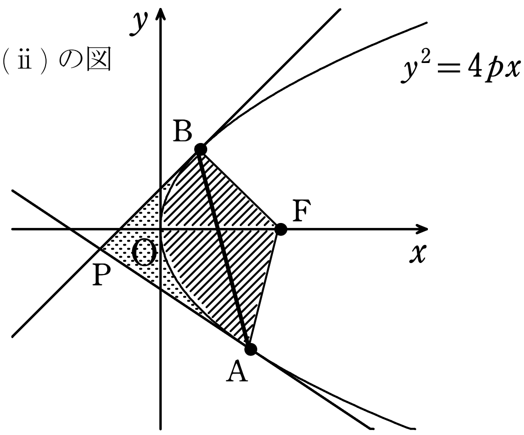
$-\dfrac{7}{2}<a<0$，$0<a<1$ のとき $N(a)=3$，　$a=0$，1，$-\dfrac{7}{2}$ のとき $N(a)=2$，

$a<-\dfrac{7}{2}$，$1<a$ のとき $N(a)=1$

［Ⅲ］

問１　焦点 F$(p,\ 0)$ である．





$\beta+\alpha\fallingdotseq 0$ のとき，直線 AB の傾きは　$\dfrac{\beta-\alpha}{\dfrac{\beta^2}{4p}-\dfrac{\alpha^2}{4p}}=\dfrac{4p}{\beta+\alpha}$

よって直線 AB の方程式は　$y=\dfrac{4p}{\beta+\alpha}\left(x-\dfrac{\alpha^2}{4p}\right)+\alpha$

$$(\beta+\alpha)y=4px+\alpha\beta \iff x=\frac{\beta+\alpha}{4p}y-\frac{\alpha\beta}{4p}$$

これは $\beta+\alpha=0$ のときも成り立つ．

$y=0$ のとき　$4px+\alpha\beta=0$　$\therefore\ x=-\dfrac{\alpha\beta}{4p}$

よって　$\triangle\mathrm{FAB}=\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{\alpha\beta}{4p}-p\right|(\beta-\alpha)$

また，放物線 C と直線 AB で囲まれた部分の面積を U とすると

$$\int_\alpha^\beta\left\{\left(\frac{\beta+\alpha}{4p}y-\frac{\alpha\beta}{4p}\right)-\frac{y^2}{4p}\right\}dy=-\frac{1}{4p}\int_\alpha^\beta(y-\beta)(y-\alpha)\,dy$$

$$=\frac{1}{4p}\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{24p}(\beta-\alpha)^3$$

（ｉ）　$p<-\dfrac{\alpha\beta}{4p}$，つまり $-\dfrac{\alpha\beta}{4p}-p>0$ のとき

$$S=U-\triangle\mathrm{FAB}=\frac{1}{24p}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha\beta}{4p}-p\right)(\beta-\alpha)=\frac{1}{24p}(\beta-\alpha)\{(\beta-\alpha)^2+3(\alpha\beta+4p^2)\}$$

（ⅱ）　$p>-\dfrac{\alpha\beta}{4p}$，つまり $-\dfrac{\alpha\beta}{4p}-p<0$ のとき

$$S=U+\triangle\mathrm{FAB}=\frac{1}{24p}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta}{4p}+p\right)(\beta-\alpha)=\frac{1}{24p}(\beta-\alpha)\{(\beta-\alpha)^2+3(\alpha\beta+4p^2)\}$$

（ｉ），（ⅱ）より　$\boldsymbol{S=\dfrac{1}{24p}(\beta-\alpha)\{(\beta-\alpha)^2+3(\alpha\beta+4p^2)\}}$

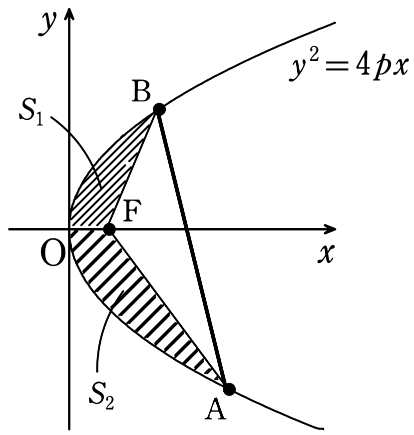
$\boxed{\text{補足}}$

　面積 S は問題文記載のとおり「C と 2 直線 AF，BF～」とすると正確に定めることができないため，「C と線分 AF，BF～」と解釈して解答した．

$\boxed{\text{補足}}$終わり

$\boxed{別解}$　1/6 公式を用いることをあきらめて，単純に積分すれば，場合分けは不要である．

直線 BF の傾きは　$\dfrac{0-\beta}{p-\dfrac{\beta^2}{4p}}=\dfrac{-4p\beta}{4p^2-\beta^2}$



であるから，直線 BF の方程式は

$$y=\frac{-4p\beta}{4p^2-\beta^2}(x-p) \iff x=\frac{\beta^2-4p^2}{4p\beta}y+p$$

曲線 C と x 軸，線分 BF で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_0^{\beta}\left(\frac{\beta^2-4p^2}{4p\beta}y+p-\frac{1}{4p}y^2\right)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{12p}y^3+\frac{\beta^2-4p^2}{8p\beta}y^2+py\right]_0^{\beta}$$

$$=-\frac{1}{12p}\beta^3+\frac{\beta(\beta^2-4p^2)}{8p}+p\beta=\frac{1}{24p}\beta^3+\frac{1}{2}p\beta$$

また，曲線 C と x 軸，線分 AF で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，これは S_1 の β を $-\alpha$ としたものになるから，

$$S_2=\frac{1}{24p}(-\alpha)^3+\frac{1}{2}p(-\alpha)=-\frac{1}{24p}\alpha^3-\frac{1}{2}p\alpha$$

したがって，求める面積 S は　$S=S_1+S_2=\boldsymbol{\dfrac{1}{24p}(\beta^3-\alpha^3)+\dfrac{1}{2}p(\beta-\alpha)}$

$\boxed{別解}$終わり

問２

点 A$\left(\dfrac{\alpha^2}{4p},\ \alpha\right)$における接線の方程式は　$\alpha y=2p\left(x+\dfrac{\alpha^2}{4p}\right)$　$\therefore$　$\alpha y=2px+\dfrac{\alpha^2}{2}$　……①

点 B$\left(\dfrac{\beta^2}{4p},\ \beta\right)$における接線の方程式は　$\beta y=2p\left(x+\dfrac{\beta^2}{4p}\right)$　$\therefore$　$\beta y=2px+\dfrac{\beta^2}{2}$　……②

①，② を連立させると　$(\beta-\alpha)y=\dfrac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$

$\alpha<0<\beta$ より $\beta-\alpha\neq 0$ であるから　$y=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

① に代入すると　$\dfrac{\alpha(\alpha+\beta)}{2}=2px+\dfrac{\alpha^2}{2}$　$\therefore$　$x=\dfrac{\alpha\beta}{4p}$

よって，２本の接線の交点 P の座標は　P$\left(\dfrac{\alpha\beta}{4p},\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

したがって

$$T=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{\frac{y^2}{4p}-\left(\frac{\alpha}{2p}y-\frac{\alpha^2}{4p}\right)\right\}dy+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left\{\frac{y^2}{4p}-\left(\frac{\beta}{2p}y-\frac{\beta^2}{4p}\right)\right\}dy$$

$$=\frac{1}{4p}\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(y-\alpha)^2\,dy+\frac{1}{4p}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(y-\beta)^2\,dy=\frac{1}{4p}\left[\frac{1}{3}(y-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{1}{4p}\left[\frac{1}{3}(y-\beta)^2\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{4p}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{4p}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{48p}(\beta-\alpha)^3}$$

問３

問１，問２の結果から，$S=T$ のとき　$\frac{1}{24p}(\beta-\alpha)\{(\beta-\alpha)^2+3(\alpha\beta+4p^2)\}=\frac{1}{48p}(\beta-\alpha)^3$

$\beta-\alpha \fallingdotseq 0$ であるから　$2\{(\beta-\alpha)^2+3(\alpha\beta+4p^2)\}=(\beta-\alpha)^2$

$(\beta-\alpha)^2+6(\alpha\beta+4p^2)=0$　　$\therefore$　$\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta+24p^2=0$　……③

ここで $-\frac{\beta}{\alpha}=k$ とおくと　$\beta=-\alpha k$

③ に代入すると　$\alpha^2+(-\alpha k)^2+4\alpha(-\alpha k)+24p^2=0$

$(k^2-4k+1)\alpha^2+24p^2=0$　………④

$p>0$，$\alpha<0$ より $24p^2>0$，$\alpha^2>0$ であるから，④ を満たす α が存在するための条件は

$k^2-4k+1<0$　　$\therefore$　$2-\sqrt{3}<k<2+\sqrt{3}$

よって，$-\frac{\beta}{\alpha}$ がとりえる値の範囲は　$\boldsymbol{2-\sqrt{3}<-\frac{\beta}{\alpha}<2+\sqrt{3}}$

［Ⅳ］

問１

$y=e^{x^2}$ より　　$y'=2xe^{x^2}$，　$y''=2\left(1\cdot xe^{x^2}+x\cdot 2xe^{x^2}\right)=2xe^{x^2}(2x+1)>0$

また，$a>0$ であるから $y=a\log x+b$ より　　$y'=\dfrac{a}{x}$，　$y''=-\dfrac{a}{x^2}<0$

よって曲線 C_1 は下に凸で，曲線 C_2 は上に凸であるから，２曲線がただ一つの共有点 $\left(\alpha,\ e^{\alpha^2}\right)$ をもつのは，２曲線がこの点で接するときである．

よって $x=\alpha$ における y 座標と接線の傾きが一致することから，

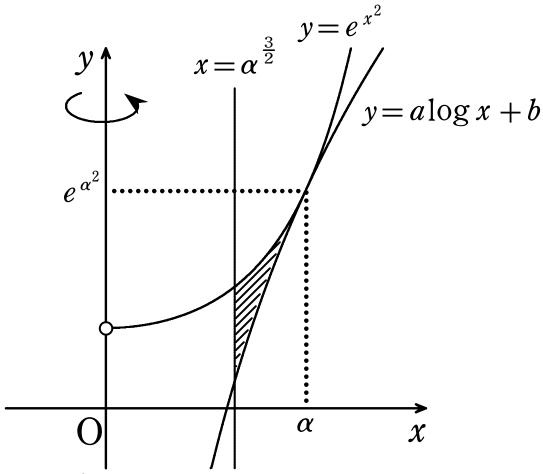
$$\begin{cases} e^{\alpha^2}=a\log\alpha+b & \cdots\cdots① \\ 2\alpha e^{\alpha^2}=\dfrac{a}{\alpha} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② より　　$\boldsymbol{a=2\alpha^2e^{\alpha^2}}$

① に代入すると　　$\boldsymbol{b=e^{\alpha^2}-2\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha}$

問２

$V(\alpha)$ は右図の斜線部分を，y 軸の周りに１回転してできる回転体の体積であるから



$$V(\alpha)=\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}2\pi x\left\{e^{x^2}-(a\log x+b)\right\}dx$$

$$=\left[\pi e^{x^2}-2\pi a\left(\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right)-\pi bx^2\right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}$$

$$=\pi\left(e^{\alpha^2}-e^{\alpha^3}\right)-\frac{\pi a}{2}\left(2\alpha^2\log\alpha-2\alpha^3\log\alpha^{\frac{3}{2}}-\alpha^2+\alpha^3\right)-\pi b\left(\alpha^2-\alpha^3\right)$$

$a=2\alpha^2e^{\alpha^2}$，　$b=e^{\alpha^2}-2\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha$　であるから

$$V(\alpha)=\pi\left(e^{\alpha^2}-e^{\alpha^3}\right)-\pi\alpha^2e^{\alpha^2}\left(2\alpha^2\log\alpha-3\alpha^3\log\alpha-\alpha^2+\alpha^3\right)-\pi\left(e^{\alpha^2}-2\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha\right)\left(\alpha^2-\alpha^3\right)$$

$$=\pi e^{\alpha^2}\left\{\left(1-e^{\alpha^3-\alpha^2}\right)+\alpha^5\log\alpha-\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2\right\}$$

$$\boldsymbol{=\pi e^{\alpha^2}\left(\alpha^5\log\alpha-\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2+1-e^{\alpha^3-\alpha^2}\right)}$$

別解　逆関数を利用して求めてもよいが，計算が煩雑となる．

$y=e^{x^2}$ より　　$x^2=\log y$

$y=a\log x+b$ より　　$\log x=\dfrac{y-b}{a}$　　　$\therefore$　$x=e^{\frac{y-b}{a}}$

また $x=\alpha^{\frac{3}{2}}$ のとき，

$y=e^{x^2}$ より　　$y=e^{\alpha^3}$

$y=a\log x+b$ より　　$y=a\log\alpha^{\frac{3}{2}}+b=\dfrac{3}{2}a\log\alpha+b$

よって，求める体積は

$$V(\alpha)=\int_{\frac{3}{2}a\log\alpha+b}^{e^{\alpha^2}}\pi\left(e^{\frac{y-b}{a}}\right)^2dy-\int_{e^{\alpha^3}}^{e^{\alpha^2}}\pi\log y\ dy-\pi\left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right)^2\times\left\{e^{\alpha^3}-\left(\frac{3}{2}a\log\alpha+b\right)\right\}$$

$$=\pi\int_{\frac{3}{2}a\log\alpha+b}^{e^{\alpha^2}}e^{\frac{2(y-b)}{a}}\ dy-\pi\int_{e^{\alpha^3}}^{e^{\alpha^2}}\log y\ dy-\pi\alpha^3\left\{e^{\alpha^3}-\left(\frac{3}{2}a\log\alpha+b\right)\right\}$$

ここで $a=2\alpha^2e^{\alpha^2}$， $b=e^{\alpha^2}-2\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha$ より

$$\frac{3}{2}a\log\alpha+b=3\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha+e^{\alpha^2}-2\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha=e^{\alpha^2}(\alpha^2\log\alpha+1)$$

であるから，

$$V(\alpha)=\pi\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2(y-b)}{a}}\right]_{e^{\alpha^2}(\alpha^2\log\alpha+1)}^{e^{\alpha^2}}-\pi\Big[y\log y-y\Big]_{e^{\alpha^3}}^{e^{\alpha^2}}-\pi\alpha^3\{e^{\alpha^3}-e^{\alpha^2}(\alpha^2\log\alpha+1)\}$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left\{e^{\frac{2\left(e^{\alpha^2}-b\right)}{a}}-e^{\frac{2\left(e^{\alpha^2}(\alpha^2\log\alpha+1)-b\right)}{a}}\right\}-\pi\left(\alpha^2e^{\alpha^2}-\alpha^3e^{\alpha^3}-e^{\alpha^2}+e^{\alpha^3}\right)$$

$$-\pi\alpha^3e^{\alpha^3}+\pi\alpha^5e^{\alpha^2}\log\alpha+\pi\alpha^3e^{\alpha^2}$$

もう一度 $a=2\alpha^2e^{\alpha^2}$， $b=e^{\alpha^2}-2\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha$ を代入して整理すると

$$V(\alpha)=\pi\alpha^2e^{\alpha^2}(e^{2\log\alpha}-e^{3\log\alpha})-\pi\left(\alpha^2e^{\alpha^2}-\alpha^3e^{\alpha^2}-e^{\alpha^2}+e^{\alpha^3}\right)+\pi\alpha^5e^{\alpha^2}\log\alpha$$

$$=\pi\alpha^2e^{\alpha^2}(\alpha^2-\alpha^3)-\pi e^{\alpha^2}\left(\alpha^2-\alpha^3-1+e^{\alpha^3-\alpha^2}\right)+\pi\alpha^5e^{\alpha^2}\log\alpha$$

$$\boldsymbol{=\pi e^{\alpha^2}\left(\alpha^5\log\alpha-\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2+1-e^{\alpha^3-\alpha^2}\right)}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

問３

$f(t)=e^{-t}-1+t-\dfrac{t^2}{2}$ とおくと， $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$f'(t)=-e^{-t}+1-t$

$f''(t)=e^{-t}-1\leqq 0$

よって $f'(t)$ は単調に減少し， $f'(0)=0$ であるから　　$f'(t)\leqq 0$

したがって $f(t)$ も単調に減少し， $f(0)=0$ であるから　　$f(t)\leqq 0$

$g(t)=e^{-t}-1+t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}$ とおくと， $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$$g'(t)=-e^{-t}+1-t+\frac{t^2}{2}=-f(t)\geqq 0$$

よって $g(t)$ は単調に増加し， $g(0)=0$ であるから　　$g(t)\geqq 0$

したがって，不等式　$-\dfrac{t^3}{6}\leqq e^{-t}-1+t-\dfrac{t^2}{2}\leqq 0$　が成り立つ． ■

問４

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\pi e^{\alpha^2}(\alpha^5\log\alpha-\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2+1-e^{\alpha^3-\alpha^2})}{\alpha^c}$$

$0<\alpha<1$ より　　$0<\alpha^3<\alpha^2<1$　　　$\therefore$　$0<\alpha^2-\alpha^3<1$

よって，問 3 の不等式において $t=\alpha^2-\alpha^3$ とおくと

$$-\frac{(\alpha^2-\alpha^3)^3}{6}\leqq e^{-(\alpha^2-\alpha^3)}-1+\alpha^2-\alpha^3-\frac{(\alpha^2-\alpha^3)^2}{2}\leqq 0$$

$$0\leqq\frac{1}{2}\alpha^6-\alpha^5+\frac{1}{2}\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2+1-e^{\alpha^3-\alpha^2}\leqq\frac{(\alpha^2-\alpha^3)^3}{6}$$

$$\alpha^5\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^6+\frac{1}{2}\alpha^4\leqq\alpha^5\log\alpha-\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2+1-e^{\alpha^3-\alpha^2}$$

$$\leqq\alpha^5\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^6+\frac{1}{2}\alpha^4+\frac{(\alpha^2-\alpha^3)^3}{6}$$

$$\frac{\pi e^{\alpha}(2\alpha^5\log\alpha-\alpha^6+\alpha^4)}{2\alpha^c}\leqq\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}\leqq\frac{\pi e^{\alpha}\{6\alpha^5\log\alpha-3\alpha^6+3\alpha^4+(\alpha^2-\alpha^3)^3\}}{6\alpha^c}$$

ここで，$L(\alpha)=\dfrac{\pi e^{\alpha}(2\alpha^5\log\alpha-\alpha^6+\alpha^4)}{2\alpha^c}$，　$R(\alpha)=\dfrac{\pi e^{\alpha}\{6\alpha^5\log\alpha-3\alpha^6+3\alpha^4+(\alpha^2-\alpha^3)^3\}}{6\alpha^c}$ とする．

$c>4$ のとき　$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}L(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\pi e^{\alpha}(2\alpha\log\alpha-\alpha^2+1)}{2\alpha^{c-4}}=\infty$

$c=4$ のとき　$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}L(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\pi e^{\alpha}(2\alpha\log\alpha-\alpha^2+1)}{2}=\frac{\pi}{2}$

$0<c<4$ のとき　$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}L(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\pi e^{\alpha}(2\alpha^{5-c}\log\alpha-\alpha^{6-c}+\alpha^{4-c})}{2}=0$

となるから，$c=4$ のときのみ極限値が正となる．

また $c=4$ のとき

$$\lim_{\alpha\to+0}R(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\pi e^{\alpha}(6\alpha\log\alpha-3\alpha^2+3+\alpha^2-3\alpha^3+3\alpha^4-\alpha^5)}{6}=\frac{\pi}{2}$$

となるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}=\frac{\pi}{2}$

以上より，$c=4$ のとき $\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$