解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2021年度　昭和大学　I期

【　講　評　】

例年通り大問4題で出題された．以下，大問ごとに述べる．

$\boxed{1}$　図形と方程式（数学B）【標準】

(1)～(3) は円と円，円と直線に関する問題である．定石通り，図形的な考察や曲線束を用いれば，難なく解くことができる．(4) は典型的な通過領域の問題であるが，苦手とする受験生が多いため，ここは差がつくところだろう．

$\boxed{2}$　小問集合（(1) 数学A／(2) 数学Ⅱ／(3) 数学B）【標準】

(1) は合同式を用いて8で割った余りを計算していくと容易に解答できる．

(2) は1となるときの底，指数の値をそれぞれ考えていければよいが，$i^4=1$ となるパターンを忘れないようにしたい．

(3) 等差数列と等比数列の和を求め，それらの和が1000になるときを考えるだけであるが，2^{n+1} のとり得る値や1002の約数に注目して，n の値を絞りながら効率的に解くようにしたい．

$\boxed{3}$　小問集合（(1) 数学A／(2) 数学Ⅲ）【やや易】

(1) 球を取り出し方に関する典型的な確率の問題である．試行回数も少なく単純な問題なので，確実に得点したい．

(2) 円と放物線で囲まれた領域の，面積および x 軸まわりの回転体の体積を求める問題である．図が把握しやすいことに加え，計算も簡単であるから，確実に得点したい．

$\boxed{4}$　小問集合（(1) 数学Ⅲ／(1) 数学A）【標準】

(1) (1－1) は楕円の面積公式を用いるだけである．(1－2) は，z 軸に垂直な断面が楕円となることに気付ければ，簡単に解くことができる．ただし，空間図形の求積問題は，近年の昭和大学の入試では出題されていないため，解けなかった人も少なくないだろう．

(2) (2－1) は反復試行に関する典型的な確率の問題であるが，数え上げの場合が多いので，表を用いて効率的に数え上げを行うと良い．また，(2－2) は期待値の問題であるが，昭和大学の入試では頻出テーマであるから，対策ができていた人も多いだろう．

全体的な難易度は去年度の試験に比べやや易しくなり，小問集合の計算量も少なくなった．1次試験突破のためには，全体で7割5分程度を得点したい．

【　解　答　】

$\boxed{1}$

(1)　D$(\sqrt{7},\ 2\sqrt{7})$,　　C_2 : $(x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2=28$

(2)　G$\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\ \sqrt{7}\right)$,　　C_3 : $\left(x-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\dfrac{77}{4}$

(3)　$\sqrt{70}$

(4)　解説参照

$\boxed{2}$

(1)　$a=1,\ 5,\ 9$

(2)　$n=2,\ 3,\ 5,\ 6$

(3)　(499，501）または（194，196，198，202，210）

$\boxed{3}$

(1)　(1−1)　$\dfrac{17}{24}$,　　(1−2)　$\dfrac{133}{450}$

(2)　(2−1)　$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$,　　(2−2)　$\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{7}{6}\pi$

$\boxed{4}$

(1)　(1−1)　πab,　　(1−2)　$\dfrac{2\pi}{\sqrt{pq}}$

(2)　(2−1)　$\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{29}{128}$, $\dfrac{35}{128}$,　　(2−2)　2 倍

【 解 説 】

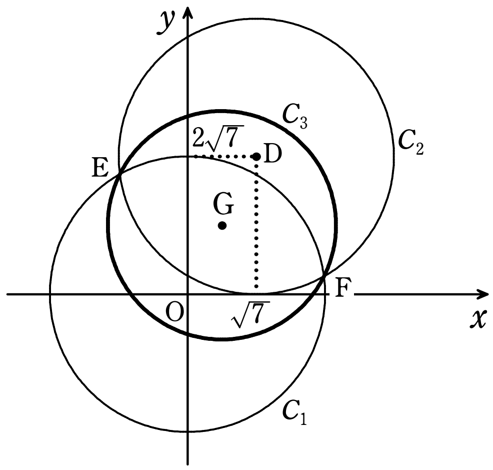
$\boxed{1}$

円 C_1 の方程式は　$x^2+y^2=27$　……①　である．

(1)　円 C_2 と x 軸と $(\sqrt{7},\ 0)$ で接するから，中心の座標は　　$\mathrm{D}(\sqrt{7},\ 2\sqrt{7})$

また，半径は $2\sqrt{7}$ であるから，円 C_2 の方程式は

$$(x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2=28$$



(2)　円 C_3 は，2 円 C_1，C_2 の交点 E，F を通り，
中心 G が 2 円の中心 O，D と等距離であるから，
その方程式は

$$x^2+y^2-28+(x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2-28=0$$
$$2x^2+2y^2-2\sqrt{7}x-4\sqrt{7}y-21=0$$
$$\therefore\ \left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}\quad\cdots\cdots②$$

$\boxed{\text{別解}}$　中心と半径を図形的に求めてもよい．

EF を直径とする円の中心 G は EF の中点であり，

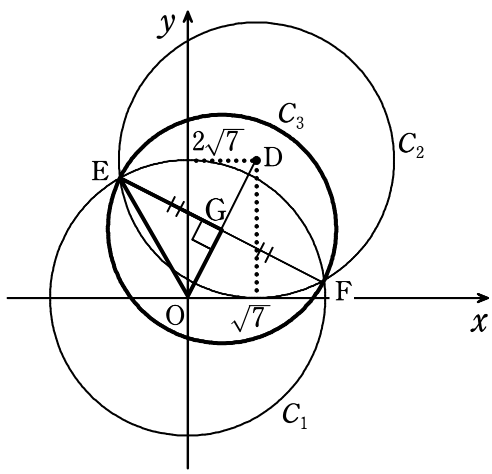
$$\mathrm{OE}=\mathrm{OF}=\mathrm{DE}=\mathrm{DF}$$

より，G は OD の中点である．

よって C_3 の中心の座標は　　$\mathrm{G}\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\ \sqrt{7}\right)$

また，OE＝OF より OG⊥EF であるから，
△OEG に三平方の定理を用いると

$$\mathrm{EG}^2=\mathrm{OE}^2-\mathrm{OG}^2=28-\left(\frac{7}{4}+7\right)=\frac{77}{4}$$



したがって，円 C_3 の方程式は

$$\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}\quad\cdots\cdots②$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(3)　円 C_3 と y 軸との交点の y 座標は，② において $x=0$ とすると

$$\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}$$

$$(y-\sqrt{7})^2=\frac{70}{4}\qquad\therefore\ y=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}+\sqrt{7}$$

よって求める距離は　　$\left(\frac{\sqrt{70}}{2}+\sqrt{7}\right)-\left(-\frac{\sqrt{70}}{2}+\sqrt{7}\right)=\sqrt{70}$

(4)　折り返して得られる円弧を一部とする円を C_4 とすると，その方程式は

$$(x-t)^2+(y-2\sqrt{7})^2=28 \quad (-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}) \quad \cdots\cdots ③$$

とおける．

弦 PQ は 2 円 C_1， C_4 の共通弦であるから， 直線 PQ の方程式は ①－③ より

$$2tx+4\sqrt{7}\,y-t^2-28=0 \quad \cdots\cdots ④$$

この直線が $-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}$ のときに通り得る範囲と，$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 28 \\ y \geqq 0 \end{cases}$ の共通範囲が，弦 PQ の存在する範囲である．

④ を変形すると　　$y=\dfrac{1}{4\sqrt{7}}t^2-\dfrac{1}{2\sqrt{7}}xt+\sqrt{7}$

この式を， x を固定して t の 2 次関数とみたときの， $-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}$ における y のとり得る値の範囲が，直線 PQの通り得る範囲である（順像法）．

$f(t)=\dfrac{1}{4\sqrt{7}}t^2-\dfrac{1}{2\sqrt{7}}xt+\sqrt{7}$ とおくと　　$f(t)=\dfrac{1}{4\sqrt{7}}(t-x)^2-\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7}$

$x^2+y^2 \leqq 28$ より $-2\sqrt{7} \leqq x \leqq 2\sqrt{7}$ であることに注意すると

(ｉ) $-2\sqrt{7} \leqq x<0$ のとき

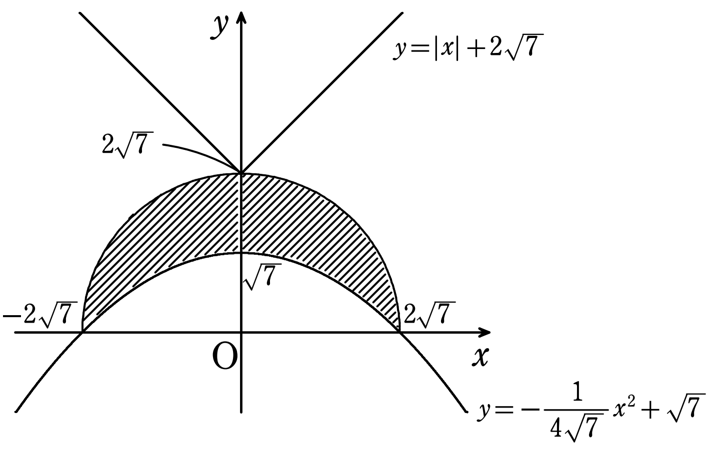
$f(x) \leqq y \leqq f(2\sqrt{7})$ であるから　　$-\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7} \leqq y \leqq -x+2\sqrt{7}$

(ⅱ) $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{7}$ のとき

$f(x) \leqq y \leqq f(-2\sqrt{7})$ であるから　　$-\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7} \leqq y \leqq x+2\sqrt{7}$

(ｉ), (ⅱ) をまとめると　　$-\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7} \leqq y \leqq |x|+2\sqrt{7}$

この範囲と $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 28 \\ y \geqq 0 \end{cases}$ の共通範囲が弦 PQ の存在する範囲であるから， これを図示すると下の図の斜線部分となる．ただし，境界線上を含む．



$\boxed{\text{別解}}$　実数 t の存在条件を考えても良い（逆像法）.

④ より　　$t^2-2xt-4\sqrt{7}\,y+28=0$　……⑤

t の 2 次方程式 ④ が，$-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつときの $(x,\ y)$ の存在範囲が，直線 ④ の通りえる範囲である.

⑤ の判別式を D とし，⑤ の左辺を $f(t)$ とおくと　　$f(t)=(t-x)^2-x^2-4\sqrt{7}\,y+28$

$x^2+y^2 \leqq 28$ より，放物線 $y=f(t)$ の軸について $-2\sqrt{7} \leqq x \leqq 2\sqrt{7}$ であるから，

$-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつための条件は

$$\begin{cases} D \geqq 0 & \cdots\cdots⑥ \\ f(-2\sqrt{7}) \geqq 0 \text{ または } f(2\sqrt{7}) \geqq 0 & \cdots\cdots⑦ \end{cases}$$

⑥ より　　$\dfrac{D}{4}=x^2-(-4\sqrt{7}\,y+28) \geqq 0$　　　$\therefore$　$y \geqq -\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7}$　…… ⑥'

⑦ より　　$4\sqrt{7}\,x-4\sqrt{7}\,y+56 \geqq 0$　または　$-4\sqrt{7}\,x-4\sqrt{7}\,y+56 \geqq 0$

$\therefore$　$y \leqq x+2\sqrt{7}$　または　$y \leqq -x+2\sqrt{7}$　…… ⑦'

⑥'，⑦' をまとめると　　$-\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7} \leqq y \leqq |x|+2\sqrt{7}$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

$\boxed{\text{参考}}$　包絡線を求めてしまえば，図形的に通過領域を把握することもできる.

④ 式を t で微分すると　　$2x-2t=0$　　$\therefore$　$t=x$

これを ④ に代入すると　　$2x^2+4\sqrt{7}\,y-x^2-28=0$　　$\therefore$　$y=-\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7}$

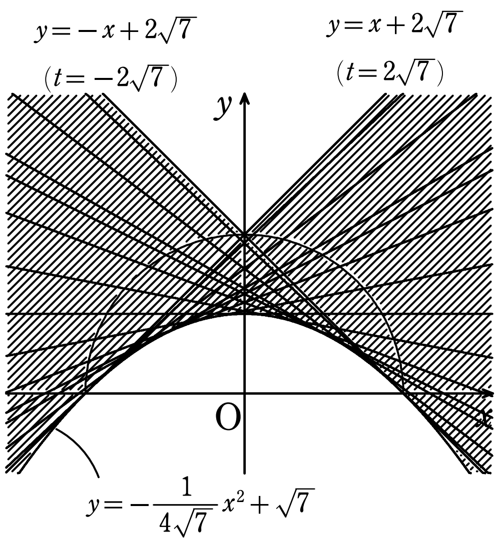
放物線 $y=-\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7}$ と直線 ④ を連立させると

$2tx-x^2+28-t^2-28=0$

$(x-t)^2=0$　　　$\therefore$　$x=t$

よって直線 ④ は放物線 $y=-\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7}$ の $x=t$ における接線である.

したがって，この接線を $-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}$ の範囲で変化させると，直線 ④ の通りえる範囲は，下の図の斜線部分であることがわかる.



$\boxed{\text{参考}}$終わり

$\boxed{2}$

(1)　以下の合同式は mod 8 とする．十の位の数を a とすると

$$\begin{aligned}&2021a2\\ &=200000+2000+100+a\cdot 10+2\\ &\equiv 0+0+4+a\cdot 2+2\\ &=2a+6\end{aligned}$$

$0\leqq a\leqq 9$ であるから，$2a+6\equiv 0$ となるものを考えると

$a=1,\ 5,\ 9$

(2)　$\left(\sqrt{n^2-9n+19}\right)^{n^2+5n-14}=1$ となるのは，次のいずれかが成り立つときである．

(ⅰ)　$n^2-9n+19=1$

(ⅱ)　$n^2+5n-14=0$

(ⅲ)　$n^2-9n+19=-1$　……①　かつ　$n^2+5n-14$ が 4 の倍数

(ⅰ)のとき，$n^2-9n+19=1$ より　$(n-3)(n-6)=0$　$\therefore\ n=3,\ 6$

(ⅱ)のとき，$n^2+5n-14=0$ より　$(n+7)(n-2)=0$　$\therefore\ n=2$（$\because$ n は自然数）

(ⅲ)のとき，$n^2-9n+19=-1$ より　$(n-4)(n-5)=0$　$\therefore\ n=4,\ n=5$

$n^2+5n-14$ が 4 の倍数となるのは，$n=5$ のときである．

したがって(ⅰ)〜(ⅲ)より，求める n の値は　$n=2,\ 3,\ 5,\ 6$

(3)　$m+(m+2)+(m+4)+\cdots\cdots+(m+2^n)$

$$=m(n+1)+\frac{2(2^n-1)}{2-1}=m(n+1)+2^{n+1}-2$$

和がちょうど 1000 になるとき　$m(n+1)+2^{n+1}-2=1000$

$\therefore\ m(n+1)+2^{n+1}=1002$　……①

① より　$m(n+1)=1002-2^{n+1}>0$　$\therefore\ 1\leqq n\leqq 8$

$1002=3\times 334$ であり，$n\geqq 1$ のとき 2^{n+1} が 4 の倍数であることに注目すると，

mod 3 のとき，$1002\equiv 0$，$2^{n+1}\not\equiv 0$ であるから　$n+1\not\equiv 0$

mod 4 のとき，$1002\not\equiv 0$，$2^{n+1}\equiv 0$ であるから　$n+1\not\equiv 0$

よってこれらを満たすのは　$n=1,\ 4,\ 6$

① に代入すると，

$n=1$ のとき　$2m+2^2=1002$　$\therefore\ m=499$

$n=4$ のとき　$2m+2^5=1002$　$\therefore\ m=194$

$n=6$ のとき　$2m+2^7=1002$　これを満たす自然数 m は存在しない．

したがって $(m,\ n)=(499,\ 1),\ (194,\ 4)$ であるから，求める (*) は

（499，501）または（194，196，198，202，210）

$\boxed{3}$

(1)(1−1)　白球のみ3回取り出す確率は　$\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{7}{24}$

よって，取り出した球が少なくとも1個は赤球であった確率は　$1-\dfrac{7}{24}=\dfrac{17}{24}$

(1−2)　赤球，白球，白球の順で取り出すとき，または，白球，赤球，白球の順で取り出すときであるから，求める確率は

$$\frac{3\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 10\cdot 9}+\frac{7\cdot 3\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 9}=\frac{133}{450}$$

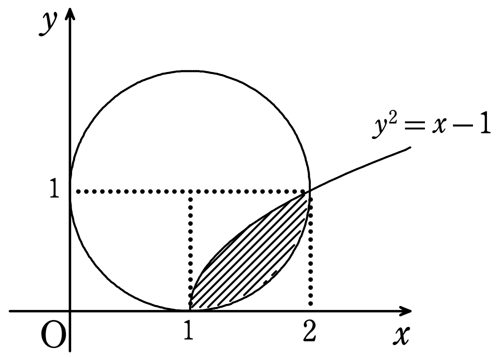
(2)(2−1)　$y^2=x-1$ より　$x=y^2+1$

図形Aは右図の斜線部分であるから，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2+1^2-\int_0^1(y^2+1)\,dy$$

$$=\frac{\pi}{4}+1-\left[\frac{1}{3}y^3+y\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$



別解

A(1, 0), B(2, 0), C(2, 1), D(1, 1) とおく．

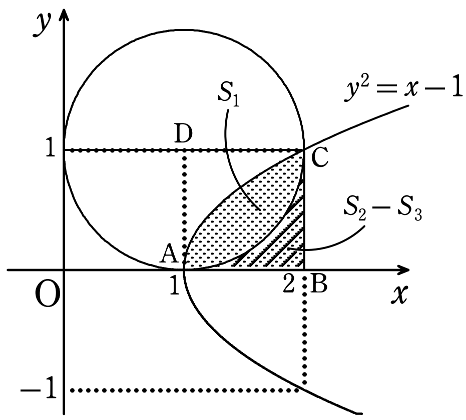
放物線 $y^2=x-1$ と x 軸，$x=2$ で囲まれた部分の面積を S_1，

正方形ABCDの面積を S_2，扇形DACの面積を S_3 とすると，

$$S=S_1-(S_2-S_3)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\cdot(1+1)^3-\left(1^2-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$



別解終わり

(2−2)　図形Aを x 軸方向に -1 だけ平行移動させても，体積 V は同じである．

図形Aの境界線について，

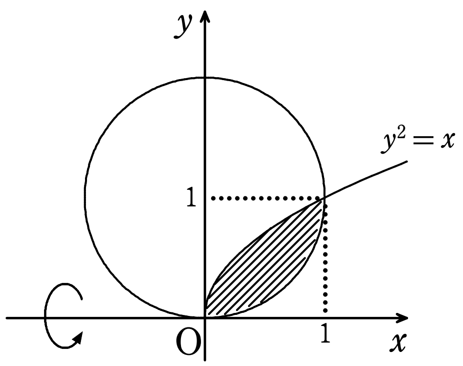
$y^2=x\ (y\geqq 0)$ より　$y=\sqrt{x}$

$x^2+(y-1)^2=1\ (0\leqq y\leqq 1)$ より　$y=1-\sqrt{1-x^2}$

よって求める体積は

$$V=\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2\,dx-\pi\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1 x\,dx-\pi\int_0^1\left(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}\right)dx$$



$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ が円 $x^2+y^2=1$ の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表すことに注意すると，

$$V=\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-\pi\left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{2}-\frac{7}{6}\pi$$

$\boxed{\text{別解}}$　置換積分を用いて計算することもできる．

$x=\sin\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると　　$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$，

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

$\boxed{4}$

(1)(1−1)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=1$ を x 軸方向に a 倍，　y 軸方向に b 倍したもの

であるから，その面積は　　$\boldsymbol{\pi ab}$

(1−2)　$px^2+qy^2=z+2\geqq 0$ より　　$z\geqq -2$

よって，この曲面と xy 平面で囲まれる立体は $-2\leqq z\leqq 0$ の範囲に存在する．

$z=t\,(-2<t\leqq 0)$ のとき　　$px^2+qy^2=t+2$　　　$\therefore\ \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\dfrac{t+2}{p}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\dfrac{t+2}{q}}\right)^2}=1$

よって，曲面を $z=t$ で切断したときの断面は楕円であり，その面積は

$$\pi\cdot\sqrt{\frac{t+2}{p}}\cdot\sqrt{\frac{t+2}{q}}=\frac{\pi}{\sqrt{pq}}(t+2)$$ （これは $t=-2$ のときも成り立つ．）

したがって求める体積は

$$V=\int_{-2}^{0}\frac{\pi}{\sqrt{pq}}(t+2)\,dt=\frac{\pi}{\sqrt{pq}}\left[\frac{1}{2}(t+2)^2\right]_{-2}^{0}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{\sqrt{pq}}}$$

(2)(2−1)　Aの表の枚数を a，B の表の枚数を b とすると，${}_4\mathrm{C}_a\times{}_3\mathrm{C}_b$ の値は次の表のようになる．

b \ a	0	1	2	3	4
0	1	4	6	4	1
1	3	12	18	12	3
2	3	12	18	12	3
3	1	4	6	4	1

A が勝つのは

$(a,\ b)=(1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 0),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)$

となるときであるから，その確率は

$$(4+6+18+4+12+12+1+3+3+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{64}{2^7}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

また，引き分けとなるのは

$(a,\ b)=(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3)$

となるときであるから，その確率は

$$(1+12+18+4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{2^7}=\boldsymbol{\frac{35}{128}}$$

したがって，B が勝つ確率は　$1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{35}{128}\right)=\boldsymbol{\dfrac{29}{128}}$

$\boxed{\text{補足}}$

A の表の出る回数が B の表の出る回数よりも大きければ A が勝ち，A の裏の出る回数が B の裏の出る回数よりも大きければ A が勝ちでないことから，A が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ である．

$\boxed{\text{補足}}$終わり

(2−2)　k を整数とし，金貨の額面を k，銀貨の額面を 1 とする．

A が勝ち取る金額の期待値は　　$0\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

また，B が勝ち取る金額の期待値は　　$0\cdot\left(1-\dfrac{29}{128}\right)+4k\cdot\dfrac{29}{128}=\dfrac{29}{32}k$

よって，B の勝ち取る金額の期待値が， A の勝ち取る金額の期待値よりも高くなるのは

$$\frac{29}{32}k>\frac{3}{2}\qquad\therefore\quad k>\frac{48}{29}$$

これを満たす最小の整数 k は $k=2$ であるから，金貨の額面は銀貨の額面の少なくとも 2 倍とすべきである．