# 2021 年度　東海大学（２／２）

【　講　評　】

例年通り大問 3 題で出題された．以下，大問ごとに講評する．

$\boxed{1}$やや易～標準レベルの小問集合で，計算が煩雑な問題もないので，手際よく処理して確実に得点したい．

$\boxed{2}$複素数平面の問題で，文字や条件が多いため解きづらく感じた受験生は少なくないだろう．特に (2)，(3) において，絶対値の条件から複素数が表す点の軌跡を読み取り，図形的に処理できたかどうかが鍵となる．

$\boxed{3}$微分・積分の融合問題で，誘導に従って解いていけばそれほど難しくはないが，計算がやや煩雑である．また，はさみうちの原理に苦手意識のある受験生には解きづらい問題である．

全体的な難易度は昨年同様であるが，$\boxed{2}$や$\boxed{3}$の解きづらさを考慮すると，昨年より難しく感じた受験生が多いだろう．全体で 6 割 5 分程度の得点をしたい．

【　解　答　】

$\boxed{1}$　**小問集合【標準】**

ア：5,　イ：3,　ウ：$\dfrac{13}{19}$,　エ：4,　オ：$0<r\leqq\sqrt{2}$,　カ：$r\geqq 5\sqrt{2}$,　キ：3

$\boxed{2}$　**複素数平面（数Ⅲ）【標準】**

ア：$\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$,　イ：$-\sqrt{3}$,　ウ：2,　エ：0,　オ：1,　カ：$\dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2}$,

キ：$\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$,　ク：$-i$,　ケ：1,　コ：$\dfrac{-\sqrt{3}-3i}{2}$

$\boxed{3}$　**微分法・積分法（数Ⅲ）【標準】**

ア：3,　イ：$-3$,　ウ：1,　エ：$\dfrac{3}{5}$,　オ：$\dfrac{2}{\pi}$,　カ：0,　キ：$-1+e^{-1}$,

ク：0,　ケ：$-e^{-1}$,　コ：$\left(\dfrac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}$,　サ：$e-2$,　シ：$e$

【 解 説 】

$\boxed{1}$

(1) $(a+b\sqrt{3})^3=a^3+3\sqrt{3}\,a^2b+9ab^2+3\sqrt{3}\,b^3=(a^3+9ab^2)+3(a^2b+b^3)\sqrt{3}$

$a$，$b$ は自然数，$\sqrt{3}$ は無理数であるから，$(a+b\sqrt{3})^3=530+306\sqrt{3}$ が成り立つとき

$a^3+9ab^2=530$，$3(a^2b+b^3)=306$

$\therefore$ $a(a^2+9b^2)=530$ ………①，$b(a^2+b^2)=102$ ………②

$102=3\times34=3(5^2+3^2)$ であるから，② を満たすのは $a=5$，$b=3$

これは ① も満たし，他に ①，② を満たす自然数 $a$，$b$ は存在しない．

(2) $893=611\times1+282$，$611=282\times2+47$，$282=47\times6$

ユークリッドの互除法により，893 と 611 の最大公約数は 47 であるから

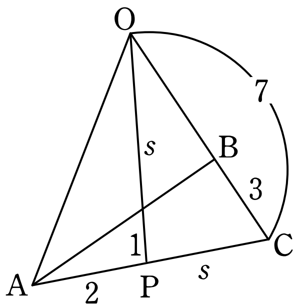
$$\frac{611}{893}=\frac{47\times13}{47\times19}=\frac{13}{19}$$

(3) △OPC と直線 AB にメネラウスの定理を用いると

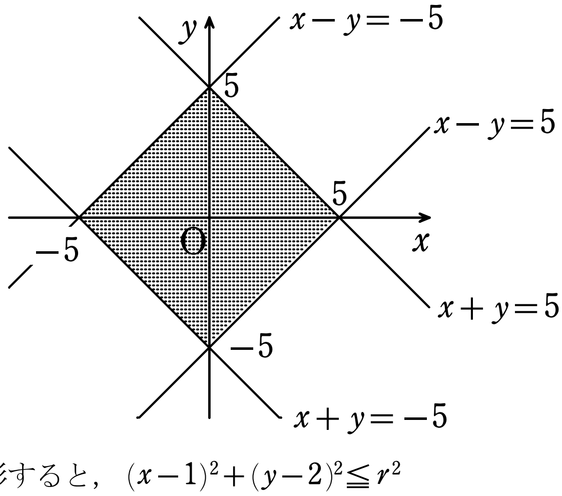
$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QP}}\times\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{AC}}\times\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BO}}=1$$

$$\frac{s}{1}\times\frac{2}{2+s}\times\frac{3}{4}=1$$

$3s=2(s+2)$ $\therefore$ $s=4$




(4) 条件 $p$ が $xy$ 平面上で表す領域を P とすると，下図の網目部分となる．
ただし，境界線を含む．



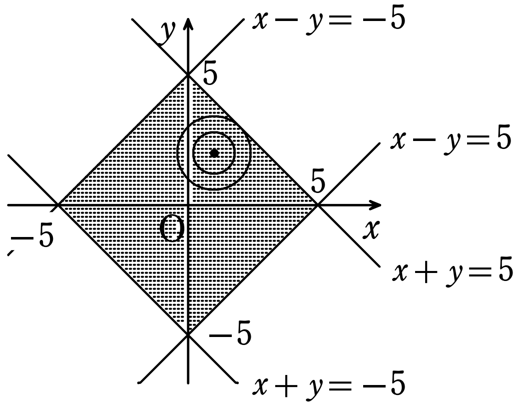

条件 $q$ を変形すると，$(x-1)^2+(y-2)^2\leqq r^2$

これが $xy$ 平面上で表す領域を Q とすると，$r>0$ であるから，中心 (1，2)，半径 $r$ の円の周上および内部を表す．

（ⅰ）　$p$ が $q$ であるための必要条件となるのは，
領域 Q が領域 P に含まれるときである．
領域 Q の境界線の円の中心が第一象限にあることに注意すると，この円と領域 P の境界線 $x+y=5$ が接するか共有点を持たないときであるから

$$r \leqq \frac{|1+2-5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$r>0$ であるから　　$\boldsymbol{0<r\leqq\sqrt{2}}$

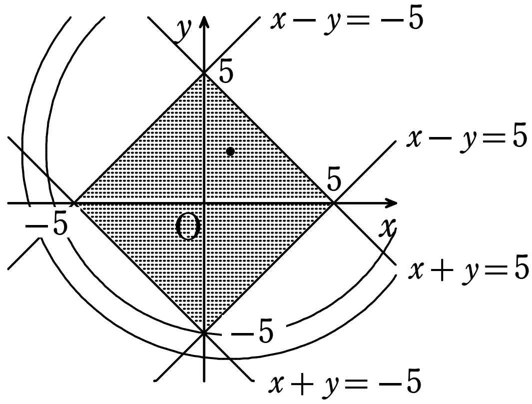



（ⅱ）　$p$ が $q$ であるための十分条件となるのは，
領域 P が領域 Q に含まれるときである．
領域 P 内の点のうち，領域 Q の境界線の円の中心 (1，2) との距離が最大となる点は (0，$-5$) であり，その距離は

$$\sqrt{(0-1)^2+(-5-2)^2} = 5\sqrt{2}$$

円の半径がこれよりも大きくなれば良いから，

$$\boldsymbol{r \geqq 5\sqrt{2}}$$




(5)　$a_k b_{n-k} = \dfrac{1}{2^{k-1}} \times \dfrac{1}{3^{n-k-1}} = \dfrac{2}{3^{n-1}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$

よって　　$c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = \frac{2}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{2}{3^{n-1}} \cdot \frac{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}$

$$= \frac{6}{3^{n-1}}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\} = 6\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

したがって　　$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n = 6\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \boldsymbol{3}$

$\boxed{\text{参考}}$　次のように和を求めることもできる．

$c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ について，$n$ を小さい方から順に書き下すと

$c_2 = a_1 b_1$，

$c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1$，

$c_4 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$，

$c_5 = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1$

$\vdots$

となる．

数列 $\{a_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから，これら各項が正である無限等比級数がいずれも収束することに注意すると

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} c_n &= a_1(b_1+b_2+b_3+\cdots)+a_2(b_1+b_2+b_3+\cdots)+a_3(b_1+b_2+b_3+\cdots)+\cdots \\ &= (a_1+a_2+a_3+\cdots)(b_1+b_2+b_3+\cdots) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)\end{aligned}$$

となる.

したがって　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 2\cdot\frac{3}{2} = 3$

$\boxed{\text{参考}}$終わり

$\boxed{2}$

$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ より　　$z^2-\sqrt{3}z+1=0$　　$\therefore$　$z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$

このうち虚部が正のものが $\alpha$ であるから　　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

(1)　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ より　　$\alpha+\overline{\alpha}=\sqrt{3}$　……①

また $|\alpha|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$ であるから　　$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1$　……②

$|p+\alpha q|=1$ の両辺を 2 乗すると　　$(p+\alpha q)(p+\overline{\alpha}q)=1$

$p^2+pq(\alpha+\overline{\alpha})+\alpha\overline{\alpha}q^2=1$

①，② より　　$p^2+\sqrt{3}pq+q^2=1$　………③

これを $p$ の 2 次方程式とみると　　$p^2+\sqrt{3}qp+q^2-1=0$

判別式を $D$ とすると，$p$ は実数であるから　　$D\geqq 0$

よって　　$3q^2-4(q^2-1)\geqq 0$

$(q-2)(q+2)\leqq 0$　　$\therefore$　$-2\leqq q\leqq 2$

したがって $q$ が最大となるのは　　$q=2$

このとき ③ より　　$p^2+2\sqrt{3}p+3=0$

$(p+\sqrt{3})^2=0$　　$\therefore$　$p=-\sqrt{3}$

また，$|p+iq|=1$ を満たすとき　　$p^2+q^2=1$　……④

③，④ より　　$\sqrt{3}pq=0$　　$\therefore$　$p=0$　または　$q=0$

④ より $p=0$ のとき　　$q=\pm 1$，$q=0$ のとき　　$p=\pm 1$

よって $q$ の値が最大となる組は　　$p=0$，$q=1$

別解　前半部は絶対値が 1 であることに注目して，極形式を用いて解くこともできる．

$|p+\alpha q|=1$ より　$p+\alpha q=\cos\theta+i\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$　とおける．

$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ より　　$p+\alpha q=p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}q+\dfrac{q}{2}i$

よって　　$\cos\theta=p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}q$　……①，$\sin\theta=\dfrac{q}{2}$　……②

② より　　$q=2\sin\theta$

よって $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$q$ は最大値 $q=2$ をとる．

また ① より　　$\cos\dfrac{\pi}{2}=p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2$　　$\therefore$　$p=-\sqrt{3}$

別解終わり

(2)　条件 (a) より $|q|=1$ であるから，$|\alpha q|=|\alpha||q|=1$

また $\alpha q$ は実数であるから　　$\alpha q=\pm 1$

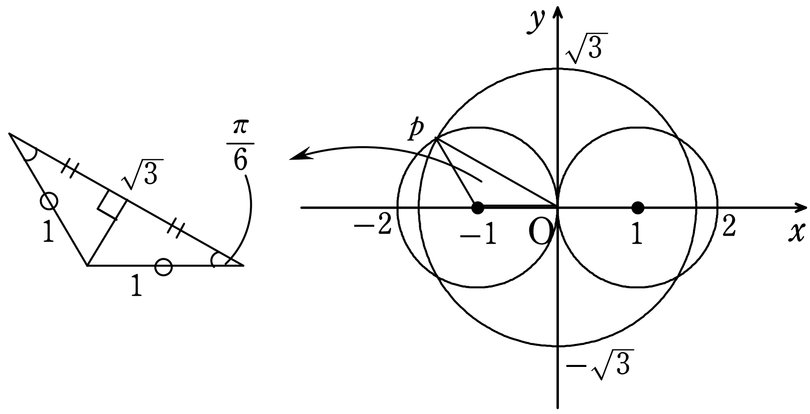
このとき条件 (b) の $|p+\alpha q|=1$ より　　$|p\pm 1|=1$

よって $p$ は複素数平面上で，中心 1，半径 1 の円周上または中心 $-1$，半径 1 の円周上に存在する．

また，$|p|=\sqrt{3}$ が成り立つとき，$p$ は複素数平面上で，中心 O，半径 $\sqrt{3}$ の円周上に存在する．

したがって，これら 2 つの円の共有点に対応する複素数が $p$ であるから，このうち実部が負で虚部が正であるものは，下の図より

$$p=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$




このとき $\alpha q=1$ であるから　　$q=\dfrac{1}{\alpha}=\alpha^{-1}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$\boxed{\text{別解}}$　図形的に考えず，計算により答えを求めることもできる．

$\alpha q$ が実数であるから　　$\arg(\alpha q)=\arg(\alpha)+\arg(q)=0$　または　$\pi$

$\arg(\alpha)=\dfrac{\pi}{6}$ であるから　　$\arg(q)=-\dfrac{\pi}{6}$　または　$\dfrac{5}{6}\pi$

$|q|=1$ であるから　　$q=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$　または　$\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi$

　　$\therefore$　$q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$　または　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

よって　　$\alpha q=1$　または　$-1$

$|p+\alpha q|=1$ より　　$(p+\alpha q)(\overline{p}+\alpha q)=1$

　　$|p|^2+\alpha q(p+\overline{p})+(\alpha q)^2=1$

$\alpha q=\pm 1$，$|p|=\sqrt{3}$，$p+\overline{p}=2\mathrm{Re}(p)$ であるから　　$3\pm 2\cdot\mathrm{Re}(p)+1=1$　　$\therefore$　$\mathrm{Re}(p)=\pm\dfrac{3}{2}$

$\mathrm{Re}(p)<0$ であるから　　$\mathrm{Re}(p)=-\dfrac{3}{2}$

$|p|=\sqrt{3}$ かつ $\mathrm{Im}(p)>0$ であるから　　$p=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

このとき $\alpha q=1$ であるから　　$q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(3)　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$，$q=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\alpha q=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$|p+\alpha q|=1$ より　　$|p+i|=1$

よって点 $p$ は，点 $-i$ を中心とする半径 1 の円を描く．

また　　$\overline{\alpha}q=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\alpha$

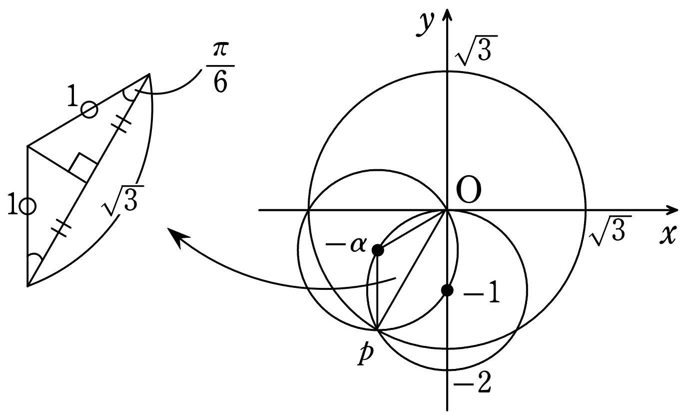
$|p+\overline{\alpha}q|=1$ より　　$|p+\alpha|=1$

よって点 $p$ は，点 $-\alpha$ を中心とする半径 1 の円を描く．

さらに $|p|=\sqrt{3}$ より，点 $p$ は点 O を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円を描く．

これら 3 つの円の共有点が，求める複素数 $p$ であるから，下の図より

$$p=\sqrt{3}\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$



$\boxed{3}$

(1)　$I_n(x^2,\ x^3)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^3-\left(\frac{k-1}{n}\right)^3\right\}$

$$=\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{m}k^2\{k^3-(k-1)^3\}$$

$$=\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}\{3k^4+(-3)k^3+1\cdot k^2\}$$

$$=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4-\frac{3}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

よって区分求積法より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(x^2,\ x^3)=3\int_0^1 x^4\,dx-3\cdot0\cdot\int_0^1 x^3\,dx+0\cdot\int_0^1 x^2\,dx$

$$=\frac{3}{5}\Big[x^5\Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

(2)　$I_n(\sin\pi x,\ x^2)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right\}$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

よって区分求積法より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(\sin\pi x,\ x^2)=2\int_0^1 x\sin\pi x\ dx-0\cdot\int_0^1\sin\pi x\ dx=2\int_0^1 x\sin\pi x\ dx$

ここで　$\displaystyle\int x\sin\pi x\ dx=-\frac{1}{\pi}x\cos\pi x+\frac{1}{\pi}\int\cos\pi x\ dx$

$$=-\frac{1}{\pi}x\cos\pi x+\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(\sin\pi x,\ x^2)=2\left[-\frac{1}{\pi}x\cos\pi x+\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$

(3)(ｉ)　$p(x)=h_1(x)-h_2(x)=x-x^2-(1-e^{-x})$ とすると，$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$p'(x)=1-2x-e^{-x}$

$p''(x)=-2+e^{-x}<0$

よって $p'(x)$ は単調に減少し，$p'(0)=0$ であるから　$p'(x)\leqq 0$

したがって $p(x)$ も単調に減少するから，

最大値 $p(0)=\boldsymbol{0}$，　最小値 $p(1)=\boldsymbol{-1+e^{-1}}$

(ⅱ)　$q(x)=h_2(x)-h_3(x)=1-e^{-x}-x$ とすると，$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$q'(x)=e^{-x}-1\leqq 0$

よって $q(x)$ は単調に減少するから，

最大値 $q(0)=\boldsymbol{0}$，　最小値 $q(1)=\boldsymbol{-e^{-1}}$

(iii)　$I_n(x^2,\ e^x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}h_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

(ⅰ), (ⅱ) より　　$p(x)=h_1(x)-h_2(x)\leqq 0,\quad q(x)=h_2(x)-h_3(x)\leqq 0$

よって　　$h_1(x)\leqq h_2(x)\leqq h_3(x)$

$0\leqq\frac{1}{n}\leqq 1$ であるから　　$h_1\left(\frac{1}{n}\right)\leqq h_2\left(\frac{1}{n}\right)\leqq h_3\left(\frac{1}{n}\right)$

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}>0$ であるから　　$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}h_1\left(\frac{1}{n}\right)\leqq I_n(x^2,\ e^x)\leqq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}h_3\left(\frac{1}{n}\right)$

このとき　　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}h_1\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}$

$$=(1-0)\cdot\int_0^1 x^2e^x\,dx=\int_0^1 x^2e^x\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}h_3\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 x^2e^x\,dx$$

ここで

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x\,dx=e^x(x^2-2x+2)+C$$　($C$ は積分定数)

であるから

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx=\Big[e^x(x^2-2x+2)\Big]_0^1=e-2$$

よって，はさみうちの原理により　　$\lim_{n\to\infty}I_n(x^2,\ e^x)=\boldsymbol{e-2}$

また　　$I_n(e^x,\ x^2)=\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right\}$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}(2k-1)=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}$$

であるから，区分求積法より　　$\lim_{n\to\infty}I_n(e^x,\ x^2)=2\int_0^1 xe^x\,dx-0\cdot\int_0^1 e^x\,dx=2\Big[xe^x-e^x\Big]_0^1=2$

したがって　　$\lim_{n\to\infty}\{I_n(x^2,\ e^x)+I_n(e^x,\ x^2)\}=e-2+2=\boldsymbol{e}$

参考　はさみうちの原理の誘導に乗らずに，次のように解くこともできる．

$n$ を自然数とし，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ とする．

$0\leqq x\leqq 1$ で定義された 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について，特に $g(x)$ が $0<x<1$ で微分可能，
かつ $0\leqq x\leqq 1$ で連続であるとき，平均値の定理により

$$\frac{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}}=g'\left(\frac{k}{n}-\theta_k\right)\qquad\therefore\quad g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}g'\left(\frac{k}{n}-\theta_k\right)$$

を満たす $\theta_k\left(0<\theta_k<\frac{1}{n}\right)$ が存在する．

よってこのような $\theta_k$ を用いると

$$I_n(f(x),\ g(x))=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}g'\left(\frac{k}{n}-\theta_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)g'\left(\frac{k}{n}-\theta_k\right)$$

と表せる.

ここで $n\longrightarrow\infty$ のとき, $0<\theta_k<\frac{1}{n}$ よりはさみうちの原理から, どんな $k$ に対しても

$$\lim_{n\to\infty}\theta_k=0$$

となるから, 区分求積法より

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f(x),\ g(x))=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)g'\left(\frac{k}{n}-\theta_k\right)=\int_0^1 f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

が成り立つ.

これを用いて本問の極限値を計算すると

$$\lim_{n\to\infty} I_n(x^2,\ x^3)=\int_0^1 x^2\cdot(x^3)'\,dx=3\int_0^1 x^4\,dx=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n(\sin\pi x,\ x^2)=\int_0^1 \sin\pi x\cdot(x^2)'\,dx=2\int_0^1 x\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n(x^2,\ e^x)=\int_0^1 x^2\cdot(e^x)'\,dx=e-2$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n(e^x,\ x^2)=\int_0^1 e^x\cdot(x^2)'=2\int_0^1 xe^x\,dx=2$$

となる.

$\boxed{\text{参考}}$終わり