解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2021年度　東海大学（2／3）

【　講　評　】

例年通りの形式で出題された．以下，大問ごとに述べる．

1　例年通り小問集合であったが，前日の試験と比較して解きづらい問題が多く，うまく得点できない受験生が多かったであろう．この問題の出来が合否に大きく影響すると思われる．

2　前半は簡単な関数の最大・最小値を求める問題であるから落とせない．後半は空間座標内の図形の断面積や体積に関する問題で，適切な平面を抜き出すか，ベクトルを利用して解析していく力が大切となる．東海大の入試で出題される問題としては珍しい分野であるため，対策ができていない受験生が多かったのではないだろうか．実力差のあらわれやすい問題である．

3　関数列に関する極限を求める問題であった．問題文の誘導に従って漸化式を導くことができれば，あとは3項間漸化式を解くだけである．特性方程式の解が無理数になってしまうが，解法の誘導に素直に従えば問題ないだろう．比較的得点しやすい問題である．

全体的な難易度は例年通りであるが，空間図形の出題や，例年出題されてきた確率が出題されなかったことでペースを乱された人も少なくないだろう．全体で6割5分程度が得点できていればよいだろう．

【　解　答　】

1　小問集合【標準】

ア：$4-\sqrt{5}$，　イ：1，　ウ：$2^4\cdot3\cdot17\cdot19$，　エ：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　オ：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

カ：$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$，　キ：$\dfrac{4}{3}$，　ク：$\dfrac{7}{2}$，　ケ：$\dfrac{5}{4}\log 2-\dfrac{3}{4}$

2　微分法（数学Ⅲ）／積分法（数学Ⅲ）／ベクトル（数学B）【標準】

ア：$\dfrac{1}{3}$，　イ：$\dfrac{3}{2}$，　ウ：$\dfrac{2}{5}$，　エ：$\dfrac{25}{4}$，　オ：$\dfrac{1}{3}$，　カ：$\dfrac{1}{3}$，　キ：$\dfrac{7}{27}$，

ク：t，　ケ：$\dfrac{t}{u}$，　コ：$\dfrac{u-t}{u}$，　サ：$\dfrac{2}{5}$，　シ：$\dfrac{25}{72}$，　ス：$\dfrac{8+\sqrt{10}}{27}$

3　数列（数学B）／数列の極限（数学Ⅲ）【やや易】

ア：7，　イ：5，　ウ：17，　エ：12，　オ：2，　カ：1，　キ：2，　ク：1，

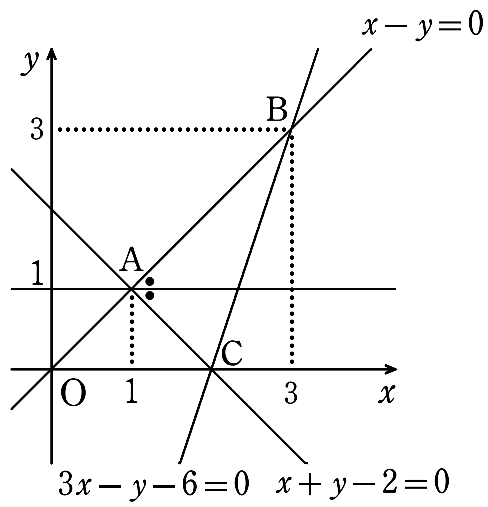
ケ：$1+\sqrt{2}$，　コ：$1-\sqrt{2}$，　サ：$4-3\sqrt{2}$，　シ：$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$，　ス：$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$，

セ：$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}$，　ソ：$\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4}$，　タ：$\sqrt{2}$

【 解 説 】

$\boxed{1}$

(1) 2 直線 $x-y=0$, $x+y-2=0$ の交点は $(1,\ 1)$ であるから，この 2 直線のなす角を二等分する直線の方程式は $y=1$ である．求める円の中心はこの直線上にあるから，$(a,\ 1)$ とおける．



この点から 2 直線 $x-y=0$, $3x-y-6=0$ までの距離が等しいことから

$$\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|3a-7|}{\sqrt{10}} \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$5(a-1)^2=(3a-7)^2$$

$$a^2-8a+11=0$$

$$\therefore \quad a=4\pm\sqrt{5}$$

右図より $a<3$ であるから $a=4-\sqrt{5}$

よって内接円の中心の座標は **$(4-\sqrt{5},\ 1)$**

$\boxed{\text{別解}}$ 内接円の半径を図形的に求めてもよい．

2 直線 $x-y=0$, $x+y-2=0$ の交点を $\mathrm{A}(1,\ 1)$，2 直線 $x-y=0$, $3x-y-6=0$ の交点を $\mathrm{B}(3,\ 3)$，2 直線 $x+y-2=0$, $3x-y-6=0$ の交点を $\mathrm{C}(2,\ 0)$ とすると，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(2-3)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$$

$$\mathrm{CA}=\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$$

であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径を r とすると

$$2=\frac{1}{2}r(2\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{2})$$

$$\therefore \quad r=\frac{4}{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$$

よって，中心 $(a,\ 1)$ と直線 $x-y=0$ の距離が r となればよいから

$$\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$$

$$|a-1|=3-\sqrt{5}$$

図より $a>1$ であるから $a-1=3-\sqrt{5}$ $\therefore$ $a=4-\sqrt{5}$

よって $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の中心の座標は **$(4-\sqrt{5},\ 1)$**

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(2)　実数 x について，$[x]$ を x を超えない最大の整数とする．

$${}_{20}\mathrm{C}_7=\frac{20!}{13!7!}=\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}=19\cdot17\cdot16\cdot15=2^4\cdot3\cdot5\cdot17\cdot19$$

また，　$\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{2^2}\right]+\left[\frac{20}{2^3}\right]+\left[\frac{20}{2^4}\right]=10+5+2+1=18$，　$\left[\frac{20}{3}\right]+\left[\frac{20}{3^2}\right]=6+2=8$

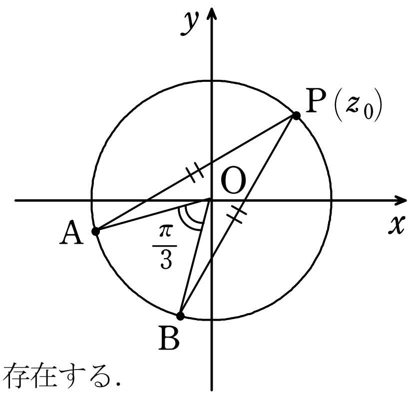
$$\left[\frac{20}{5}\right]=4,\quad \left[\frac{20}{7}\right]=2,\quad \left[\frac{20}{11}\right]=\left[\frac{20}{13}\right]=\left[\frac{20}{17}\right]=\left[\frac{20}{19}\right]=1$$

であるから　　$20!=2^{18}\cdot3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19$

よって　　$\dfrac{20!}{2^{10}\cdot3^6\cdot5^4\cdot7^2}=2^8\cdot3^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19$

したがって，${}_{20}\mathrm{C}_7$ と $\dfrac{20!}{2^{10}\cdot3^6\cdot5^4\cdot7^2}$ の最大公約数を素因数分解したものは　　$\mathbf{2^4\cdot3\cdot17\cdot19}$

(3)　A(z)，B(w) とすると，$|z|=|w|=1$ であるから，
2 点 A，B は O を中心とする半径 1 の円周上に存在する．



$\arg(z)=\dfrac{13}{12}\pi$，$\arg(w)=\dfrac{17}{12}\pi$ より

$$\angle\mathrm{OAB}=\frac{17}{12}\pi-\frac{13}{12}\pi=\frac{\pi}{3}$$

P(z_0) とすると，条件より $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{6}$ で
あるから，円周角と中心角の関係により，点 P はこの円周上に存在する．
また，AP$=$BP より，点 P は $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線上にあるから，

$$\arg(z_0)=\frac{\pi}{4},\quad |z_0|=1$$

よって　　$z_0=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$\boxed{\text{別解}}$　回転の式を立てて，計算によって求めることもできる．

A(z)，B(w)，P(z_0) とする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を $\dfrac{\pi}{6}$ 回転させたものが $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ であるから

$$(z-z_0)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=w-z_0$$

z_0 について整理すると　　$\left(1-\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)z_0=w-z\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z=\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi$ であるから

$$\begin{aligned}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)z_0&=\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi-\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\\&=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}-1\right)\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

$1-\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\neq0$ であるから　　$z_0=-\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(4) $f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(x+h)+\tan(x-h)-2\tan x}{h^2}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}-\frac{\tan x-\tan(x-h)}{h}\right\}$$

ここで $g(x)=\dfrac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$ とおくと　$\lim_{h\to 0}g(x)=(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

であるから

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x-h)}{h}=\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)'=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

よって　$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{\text{別解}}$　微分の定義式と解釈せずに，単純に極限計算を行ってもよい．

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)+\tan(x-h)-2\tan x}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\tan x+\tan h}{1-\tan x\tan h}+\dfrac{\tan x-\tan h}{1+\tan x\tan h}-2\tan x}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\tan x\tan^2 h+2\tan^3 x\tan^2 h}{h^2(1-\tan^2 x\tan^2 h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}2\cdot\left(\frac{\tan h}{h}\right)^2\cdot\frac{\tan x+\tan^3 x}{1-\tan^2 x\tan^2 h}$$

$$=2\cdot 1^2\cdot\frac{\tan x+\tan^3 x}{1-0}=2(\tan x+\tan^3 x)$$

よって　$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right\}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

$\boxed{\text{参考}}$　ロピタルの定理の利用を認めれば，次のように $f(x)$ を求めることもできる．

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)+\tan(x-h)-2\tan x}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2(x+h)}-\dfrac{1}{\cos^2(x-h)}}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2\sin(x+h)}{\cos^3(x+h)}+\dfrac{2\sin(x-h)}{\cos^3(x-h)}}{2}=\frac{\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}+\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}}{2}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$\boxed{\text{参考}}$終わり

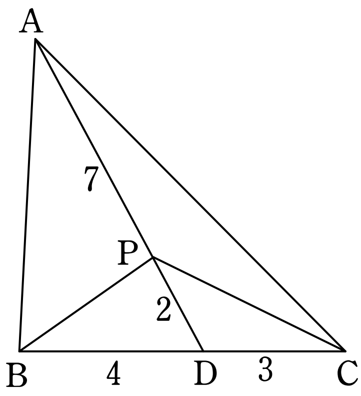
(5)　$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ より

$$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+4(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$$

$$9\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}=\frac{7}{9}\left(\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$ とおくと　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$



よって，点 D は線分 BC を 4 : 3 に内分する点であり，

点 P は線分 AD を 7 : 2 に内分する点であるから

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\frac{4}{3},\quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\frac{7}{2}$$

別解

$\triangle$ABC の内部の点 P について，$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\overrightarrow{\mathrm{BP}}+c\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立つとき，

$$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}=c:a:b$$

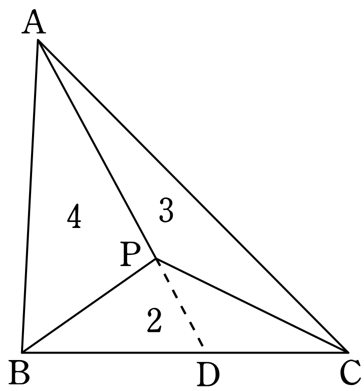
が成り立つ．

このことを用いると，$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ より

$$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}=4:2:3$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\triangle\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{PCA}}=\dfrac{4}{3}$

また，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{PD}}=\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{PBC}}=\dfrac{9}{2}$ より　　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\dfrac{7}{2}$



別解終わり

(6)　$$\int_{\sqrt{\sqrt{e}-1}}^{\sqrt{e^2-1}}\frac{x\log(\log(x^2+1))}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\sqrt{e}-1}}^{\sqrt{e^2-1}}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\cdot\log(\log(x^2+1))\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\sqrt{e}-1}}^{\sqrt{e^2-1}}\{\log(x^2+1)\}'\cdot\log(\log(x^2+1))\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(x^2+1)\cdot\log(\log(x^2+1))-\log(x^2+1)\Big]_{\sqrt{\sqrt{e}-1}}^{\sqrt{e^2-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(2\log 2-2)-\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{4}\log 2-\frac{3}{4}$$

$\boxed{2}$

(1)(ⅰ) $y=\dfrac{1}{1-x}$ は単調増加であるから， $x=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $y=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$ をとる.

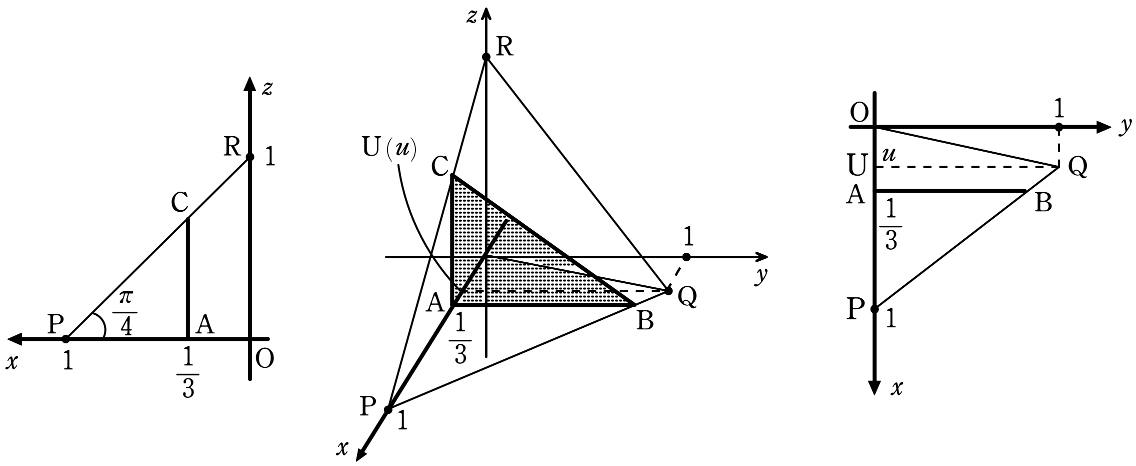
(ⅱ) $y=\dfrac{5x-1}{x^2}$ より $\quad y'=\dfrac{5\cdot x^2-(5x-1)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2-5x}{x^3}$

よって， $x>\dfrac{1}{3}$ における増減は次のようになる.

x	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$	
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$		$\searrow$

したがって，$x=\dfrac{2}{5}$ のとき最大値 $y=\dfrac{5\cdot\dfrac{2}{5}-1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{25}{4}$ をとる.

(2)(ⅰ) 平面 H と辺 OP，PQ，PR との交点を A，B，C とする.
また，U$(u,\ 0,\ 0)$ とする.



$t=\dfrac{1}{3}$ より $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$ である.

$\triangle$APC に注目すると， $\angle\mathrm{APC}=\dfrac{\pi}{4}$， $\mathrm{AP}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ より

$$\mathrm{AC}=\mathrm{AP}\tan\angle\mathrm{APC}=\frac{2}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}$$

また， $\triangle\mathrm{PQU}\backsim\triangle\mathrm{PBA}$ より $\quad \mathrm{BA}:\mathrm{AP}=\mathrm{QU}:\mathrm{UP}=1:1-u$

よって $\quad \mathrm{AB}=\dfrac{1}{1-u}\mathrm{AP}=\dfrac{2}{3(1-u)}$

よって $\quad S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3(1-u)}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{1}{1-u}$

(1)(ⅰ) より S は $u=\dfrac{1}{3}$ のとき，最大 $S=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{3}$ をとる.

$\triangle\mathrm{ABC}\perp\mathrm{AP}$ であるから $\quad V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{81(1-u)}$ $\quad\cdots\cdots$①

また，四面体 OPQR の体積は $V+W$ であるから

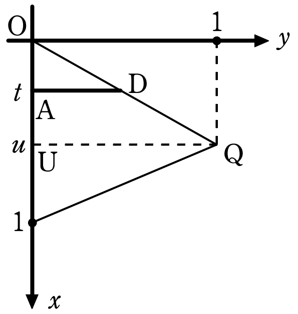
$$V+W=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OPQ}\cdot\mathrm{OR}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\right)\cdot1=\frac{1}{6}\qquad\therefore\quad W=\frac{1}{6}-V\quad\cdots\cdots②$$

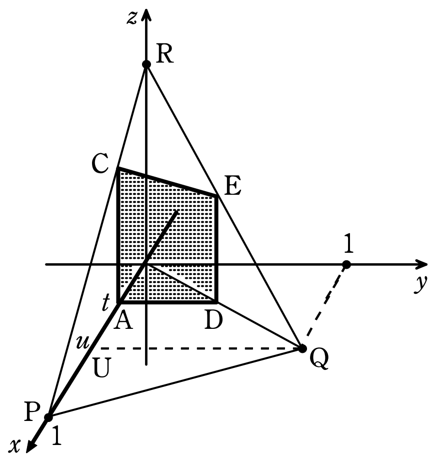
よって $3V=2W$ が成り立つとき　　$3V=2\left(\frac{1}{6}-V\right)$　　$\therefore\quad 5V=\frac{1}{3}$

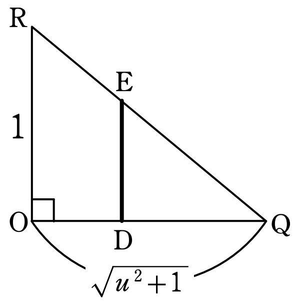
① を代入すると　　$\frac{20}{81(1-u)}=\frac{1}{3}$

$$27(1-u)=20\qquad\therefore\quad u=\frac{7}{27}$$

（ii） 平面 H と辺 OQ，QR との交点を D，E とする．







$\triangle$APC に注目すると，$\angle\mathrm{APC}=\frac{\pi}{4}$，$\mathrm{AP}=1-t$ より　　$\mathrm{AC}=\mathrm{AP}\tan\frac{\pi}{4}=1-t$

$\triangle\mathrm{OUQ}\backsim\triangle\mathrm{OAD}$ であるから　　$\mathrm{AD}:\mathrm{UQ}=\mathrm{OA}:\mathrm{OU}=t:u$

$\mathrm{UQ}=1$ より　　$\mathrm{AD}=\frac{t}{u}\mathrm{UQ}=\frac{t}{u}$

また，$\mathrm{OQ}:\mathrm{DQ}=\mathrm{OU}:\mathrm{AU}=u:u-t$ であるから，$\mathrm{OQ}=\sqrt{u^2+1}$ より

$$\mathrm{DQ}=\frac{u-t}{u}\mathrm{OQ}=\frac{u-t}{u}\sqrt{u^2+1}$$

さらに $\triangle\mathrm{OQR}\backsim\triangle\mathrm{DQE}$ より　　$\mathrm{DQ}:\mathrm{DE}=\mathrm{OQ}:\mathrm{OR}=\sqrt{u^2+1}:1$

よって　　$\mathrm{DE}=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\mathrm{DQ}=\frac{u-t}{u}$

したがって，点 E の座標は　　$\mathbf{E}\left(\boldsymbol{t},\ \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{u}},\ \frac{\boldsymbol{u-t}}{\boldsymbol{u}}\right)$

$\boxed{\text{別解}}$　ベクトルを用いて求めてもよい．

3 点 Q，E，R の x 座標に注目すると　　$\mathrm{QE}:\mathrm{ER}=u-t:t$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(u-t)\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{(u-t)+t}=\frac{t}{u}(u,\ 1,\ 0)+\frac{u-t}{u}(0,\ 0,\ 1)$

$$=\left(t,\ \frac{t}{u},\ \frac{u-t}{u}\right)$$

したがって，点 E の座標は　　$\mathbf{E}\left(\boldsymbol{t},\ \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{u}},\ \frac{\boldsymbol{u-t}}{\boldsymbol{u}}\right)$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(iii)　$u>\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき，(ii) より四面体 OPQR を平面 H で切ったときの切り口は台形となるから，その面積は

$$S=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AC}+\mathrm{DE})\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\left\{(1-t)+\frac{u-t}{u}\right\}\cdot\frac{t}{u}=\frac{-(u+1)t^2+2ut}{2u^2}\quad\cdots\cdots③$$

$t=\dfrac{1}{3}$ を代入すると　$S=\dfrac{-(u+1)\cdot\frac{1}{9}+2u\cdot\frac{1}{3}}{2u^2}=\dfrac{1}{18}\cdot\dfrac{5u-1}{u^2}$

よって (1)(ii) より，S は $u=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$ のとき最大値 $S=\dfrac{1}{18}\cdot\dfrac{25}{4}=\boldsymbol{\dfrac{25}{72}}$ をとる．

また，③ は点 O を含む立体の $x=t$ による切り口の面積であるから，

$$W=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{-(u+1)t^2+2ut}{2u^2}\,dt=\frac{1}{2u^2}\left[-\frac{1}{3}(u+1)t^3+ut^2\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2u^2}\left\{-\frac{1}{81}(u+1)+\frac{u}{9}\right\}=\frac{8u-1}{162u^2}\quad\cdots\cdots④$$

$V=W$ のとき ② より　$W=\dfrac{1}{6}-W$　　$\therefore$　$W=\dfrac{1}{12}$

④ を代入すると　$\dfrac{8u-1}{162u^2}=\dfrac{1}{12}$

$$27u^2-16u+2=0\qquad\therefore\quad u=\frac{8\pm\sqrt{10}}{27}$$

$u>\dfrac{1}{3}$ であるから　$u=\boldsymbol{\dfrac{8+\sqrt{10}}{27}}$

別解　体積 V を図形的に求めてもよい．

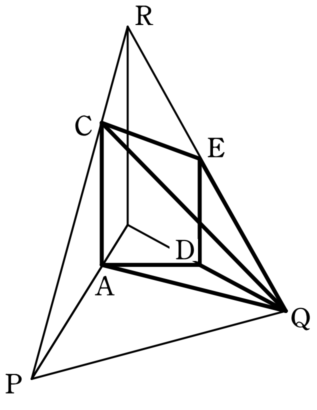
$$V=(\text{四角錘 Q}-\text{ADEC})+(\text{三角錐 C}-\text{APQ})$$

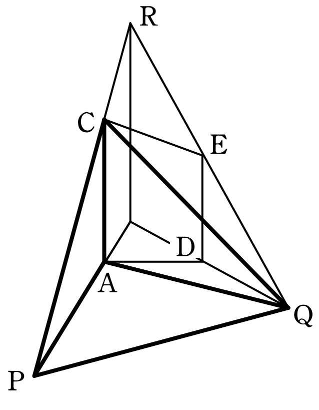
$$=\frac{1}{3}\cdot S\cdot\left(u-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot1\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{27u^2-8u+1}{162u^2}$$

$V=W$ かつ ② より $V=\dfrac{1}{12}$ であるから　$\dfrac{27u^2-8u+1}{162u^2}=\dfrac{1}{12}$

$$27u^2-16u+2=0\qquad\therefore\quad u=\frac{8\pm\sqrt{10}}{27}$$

$u>\dfrac{1}{3}$ より　$u=\boldsymbol{\dfrac{8+\sqrt{10}}{27}}$





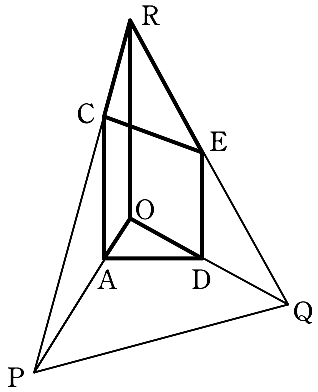
別解終わり

$\boxed{\text{参考}}$　三角柱の上部を，底面と平行でない平面で切断した図形を切頭三角柱と呼び，その体積は

$$(\text{底面積})\times(3\text{つの高さの平均})$$

で求めることができる．これを用いると，次のように W を求めることができる．

$$W=\triangle\mathrm{OAD}\times\frac{1}{3}(\mathrm{OR}+\mathrm{AC}+\mathrm{DE})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3u}\times\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{3u-1}{3u}\right)$$
$$=\frac{8u-1}{162u^2}$$



$\boxed{\text{参考}}$終わり

$\boxed{3}$

(1)　$f_1(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$ であるから

$$f_2(x)=f_1\left(\frac{1}{x+2}\right)=\frac{\dfrac{1}{x+2}+3}{\dfrac{1}{x+2}+2}=\frac{3x+7}{2x+5}=\frac{a_1x+a_2}{b_1x+b_2}$$

$$f_3(x)=f_2\left(\frac{1}{x+2}\right)=\frac{3\cdot\dfrac{1}{x+2}+7}{2\cdot\dfrac{1}{x+2}+5}=\frac{7x+17}{5x+12}=\frac{a_2x+a_3}{b_2x+b_3}$$

よって　　$a_2=7$，$b_2=5$，$a_3=17$，$b_3=12$

(2)　$f_{n+2}(x)=f_{n+1}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=\dfrac{a_n\cdot\dfrac{1}{x+2}+a_{n+1}}{b_n\cdot\dfrac{1}{x+2}+b_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}x+2a_{n+1}+a_n}{b_{n+1}x+2b_{n+1}+b_n}$

$f_{n+2}(x)=\dfrac{a_{n+1}x+a_{n+2}}{b_{n+1}x+b_{n+2}}$ であるから

$a_{n+2}=2a_{n+1}+1\cdot a_n$　………(a)

$b_{n+2}=2b_{n+1}+1\cdot b_n$　………(b)

(3)　(a) の特性方程式 $x^2=2x+1$ を解くと　　$x^2-2x-1=0$　　$\therefore$　$x=1\pm\sqrt{2}$

$\alpha>\beta$ より $\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=1-\sqrt{2}$ とすると，(a) は次のように変形できる．

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) & \cdots\cdots\cdots ① \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

$c_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ であるから，① より　　$c_{n+1}=\beta c_n$

数列 $\{c_n\}$ は，初項 $c_1=a_2-\alpha a_1=7-(1+\sqrt{2})\cdot 3=4-3\sqrt{2}$，公比 β の等比数列

であるから，

$c_n=(4-3\sqrt{2})\cdot\beta^{n-1}$

$\therefore$　$a_{n+1}-\alpha a_n=(4-3\sqrt{2})\cdot\beta^{n-1}$　………③

また ② より，数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は，初項 $a_2-\beta a_1=7-(1-\sqrt{2})\cdot 3=4+3\sqrt{2}$，

公比 α の等比数列であるから，

$a_{n+1}-\beta a_n=(4+3\sqrt{2})\cdot\alpha^{n-1}$　………④

④－③ より　　$(\alpha-\beta)a_n=(4+3\sqrt{2})\cdot\alpha^{n-1}-(4-3\sqrt{2})\cdot\beta^{n-1}$

$\alpha-\beta=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ であるから

$2\sqrt{2}\,a_n=(4+3\sqrt{2})\cdot\alpha^{n-1}-(4-3\sqrt{2})\cdot\beta^{n-1}$

$\therefore$　$a_n=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\cdot\alpha^{n-1}+\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\cdot\beta^{n-1}$

(b) についても同様に

$$\begin{cases} b_{n+2}-\alpha b_{n+1}=\beta(b_{n+1}-\alpha b_n) \\ b_{n+2}-\beta b_{n+1}=\alpha(b_{n+1}-\beta b_n) \end{cases}$$

となり，

$$b_2-\alpha b_1=5-(1+\sqrt{2})\cdot 2=3-2\sqrt{2},\quad b_2-\beta b_1=5-(1-\sqrt{2})\cdot 2=3+2\sqrt{2}$$

であるから

$$b_{n+1}-\alpha b_n=(3-2\sqrt{2})\cdot\beta^{n-1}$$

$$b_{n+1}-\beta b_n=(3+2\sqrt{2})\cdot\alpha^{n-1}$$

これら 2 式の差をとると

$$(\alpha-\beta)b_n=(3+2\sqrt{2})\cdot\alpha^{n-1}-(3-2\sqrt{2})\cdot\beta^{n-1}$$

$\alpha-\beta=2\sqrt{2}$ より

$$b_n=\frac{4+3\sqrt{2}}{4}\cdot\alpha^{n-1}+\frac{4-3\sqrt{2}}{4}\cdot\beta^{n-1}$$

$\boxed{\text{参考}}$

3 項間漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の特性方程式 $x^2+px+q=0$ が異なる 2 解 α，β $(\alpha>\beta)$ をもつとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=p\cdot\alpha^{n-1}+q\cdot\beta^{n-1}$$

と表される．

本問であれば $a_1=3$，$a_2=7$ より

$$\begin{cases} 3=p+q \\ 7=p\alpha+q\beta \end{cases}$$

という連立方程式が得られ，$\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=1-\sqrt{2}$ を代入して p，q を求めると

$$p=\frac{3+2\sqrt{2}}{2},\quad q=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

となるから，

$$a_n=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\cdot\alpha^{n-1}+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\cdot\beta^{n-1}$$

となる．数列 $\{b_n\}$ の一般項についても同様に求めることができる．

$\boxed{\text{参考}}$終わり

(4) $$f_n(0)=\frac{a_n}{b_n}=\frac{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\cdot\alpha^{n-1}+\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\cdot\beta^{n-1}}{\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}\cdot\alpha^{n-1}+\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4}\cdot\beta^{n-1}}$$

$$=\frac{2(3+2\sqrt{2})\cdot 1+2(3-2\sqrt{2})\cdot\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{(4+3\sqrt{2})\cdot 1+(4-3\sqrt{2})\cdot\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}$$

ここで，$-1<\beta<1<\alpha$ より　　$-1<\dfrac{\beta}{\alpha}<0$

よって　　$$\lim_{n\to\infty}f_n(0)=\frac{2(3+2\sqrt{2})+2(3-2\sqrt{2})\cdot 0}{4+3\sqrt{2}+(4-3\sqrt{2})\cdot 0}=\frac{2(3+2\sqrt{2})}{\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})}=\sqrt{2}$$

$\boxed{\text{参考}}$　最後の極限値は，連分数展開と考えて答えを求めることもできる．

$$f_1(x)=\frac{x+3}{x+2}=1+\frac{1}{2+x}$$

$$f_2(x)=f_1\left(\frac{1}{x+2}\right)=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x+2}}$$

$$f_3(x)=f_2\left(\frac{1}{x+2}\right)=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x+2}}}$$

$$\vdots$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(0)=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}=1+\cfrac{1}{1+\left(1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}\right)}$$

これが収束するとして $f(0)$ とおくと

$$1+\frac{1}{1+f(0)}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}=f(0)$$

となるから

$$1+\frac{1}{1+f(0)}=f(0)$$

$$\{f(0)\}^2=2$$

明らかに $f(0)>0$ であるから　　$f(0)=\sqrt{2}$

$\boxed{\text{参考}}$終わり