解答速報　数学

医学部受験専門予備校　慧修会

2021 年度　東京医科大学

【　講　評　】

昨年度，一昨年度同様，大問 4 題がマーク形式で出題された．以下，大問ごとに述べる．

1　**小問集合【やや易】**

昨年度の第 1 問と比較して解きやすい問題の組み合わせとなった．計算量も少ないため，どれも落とせない問題である．ここで満点をとっておきたい．

2　**三角関数（数学Ⅱ）／集合（数学 A）【標準】**

三角関数の周期と集合に関する問題で，どちらも入試の頻出テーマではないため，混乱した人も少なくないだろう．ただし，丁寧な誘導があるため，素直にしたがって最大値の手前辺りまでを解答したい．

3　**ベクトルと平面図形（数学 B）【易】**

ベクトルの大きさの最小値を求める典型問題で，最小値も相加・相乗平均の不等式により容易に求められるため，この問題は確実に得点する必要がある．

4　**高次方程式（数学Ⅱ）【やや易】**

相反方程式の解を 2 次方程式の解に対応させて，解と係数の関係により解に関する式の計算を行う問題であった．計算ミスに気を付けて，確実に得点したい．

昨年度と比較して，全体的な難易度は低くなっている．全体で 7 割以上の得点をしたい．

【　解　答　】

1

ア : 1,　イ : 4,　ウ : 5,　エ : 8,　オ : 3,　カ : 1,　キ : 1,　ク : 7,
ケ : 2,　コ : 1,　サ : 4,　シ : 0,　ス : 2,　セ : 1,　ソ : 6

2

ア : 1,　イ : 8,　ウ : 7,　エ : 2,　オ : 7,　カ : 5,　キ : 4,　ク : ⑥

3

ア : 1,　イ : 6,　ウ : 1,　エ : 2,　オ : 8

4

ア : 1,　イ : 1,　ウ : 2,　エ : 9,　オ : −,　カ : 1,　キ : 1,　ク : 5,　ケ : 9,
コ : −,　サ : 3,　シ : 4,　ス : 1

【　解　説　】

$\boxed{1}$

(1)　$\dfrac{2}{\sqrt{6+\sqrt{35}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{12+2\sqrt{35}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=\sqrt{14}-\sqrt{10}$

よって　　$m=\mathbf{14}$

(2)　1 つの辺を 2 つの面が共有することから，辺の数を e とすると　　$e=\dfrac{4\times 29}{2}=\mathbf{58}$

また，面の数を f，頂点の数を v とすると，オイラーの多面体定理により $v-e+f=2$ が成り立つから，$f=29$，$e=58$ を代入して

$$v-58+29=2 \qquad \therefore \quad v=\mathbf{31}$$

(3)　$f(x)$ を x^3-2x^2+3 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$f(x)=(x^3-2x^2+3)Q(x)+4x^2+5x+33=(x+1)(x^2-3x+3)Q(x)+4x^2+5x+33$$

$(x+1)(x^2-3x+3)Q(x)$ は x^2-3x+3 で割り切れるから，$f(x)$ を x^2-3x+3 で割った余りは，$4x^2+5x+33$ を x^2-3x+3 で割った余りに等しい.

$$4x^2+5x+33=4(x^2-3x+3)+17x+21$$

であるから，求める余りは　　$\mathbf{17x+21}$

(4)　x，y を整数とすると，整数 n は 9 で割ると 4 余り，11 で割ると 7 余るから

$$n=9x+4=11y+7 \qquad \therefore \quad 9x-11y=3 \quad \cdots\cdots ①$$

$9\cdot 4-11\cdot 3=3$　……②　であるから，①−② より

$$9(x-4)-11(y-3)=0 \qquad \therefore \quad 9(x-4)=11(y-3)$$

9，11 は互いに素であるから，k を整数とすると

$$\begin{cases} x-4=11k \\ y-3=9k \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x=11k+4 \\ y=9k+3 \end{cases}$$

よって　　$n=9(11k+4)+4=99k+40$

したがって，n を 99 で割った余りは $\mathbf{40}$ である.

参考

中国式剰余の定理によって，互いに素な整数 m，n について，$mx_1+ny_1=1$ となる整数 x_1，y_1 が存在し，

$$\begin{cases} x\equiv a \pmod{m} \\ x\equiv b \pmod{n} \end{cases} \iff x\equiv any_1+bmx_1 \pmod{mn}$$

となる．これを用いると，$9\cdot 5+11\cdot(-4)=1$ が成り立つから

$$\begin{cases} n\equiv 4 \pmod{9} \\ n\equiv 7 \pmod{11} \end{cases} \iff n\equiv 4\cdot 11\cdot(-4)+7\cdot 9\cdot 5=-176+315=139\equiv 40 \pmod{99}$$

参考終わり

(5)　$f(\sqrt{6})=-\sqrt{6}^{\sqrt{6}}$ より　　$\sqrt{6}\cdot f(\sqrt{6})=\sqrt{6}\cdot(-\sqrt{6}^{\sqrt{6}})=-\sqrt{6}^{\sqrt{6}+1}<0$

$f(x)=-(-x)^{\sqrt{6}}$　$(x<0)$ であるから　　$f'(x)=\sqrt{6}(-x)^{\sqrt{6}-1}$

よって　　$f'(\sqrt{6}f(\sqrt{6}))=\sqrt{6}(\sqrt{6}^{\sqrt{6}+1})^{\sqrt{6}-1}=\sqrt{6}\cdot(\sqrt{6})^5=6^3=\mathbf{216}$

$\boxed{2}$

$\cos x$ の最小の正の周期は 2π であるから， $3\cos\dfrac{x}{9}$ のすべての正の周期は

$$9\cdot 2k\pi=18k\pi \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

よって，集合 A の要素のうち最小の要素は， $k=1$ のとき　　$\boldsymbol{18\pi}$

また， $\sin x$ の最小の正の周期も 2π であるから， $4\sin\dfrac{x}{12}$ のすべての正の周期は

$$12\cdot 2l\pi=24l\pi \quad (l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

18 と 24 の最小公倍数は 72 であるから，$A\cap B$ のすべての要素は

$$72m\pi \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表わされ，このうち最小のものは $m=1$ のとき　　$\boldsymbol{p_0=72\pi}$

$72m\pi\in A\cap B$ について，

$$\begin{aligned}f(x+72m\pi)&=3\cos\frac{x+72m\pi}{9}+4\sin\frac{x+72m\pi}{12}\\&=3\cos\left(\frac{x}{9}+8m\pi\right)+4\sin\left(\frac{x}{12}+6m\pi\right)\\&=3\cos\frac{x}{9}+4\sin\frac{x}{12}=f(x)\end{aligned}$$

が成り立つから，$A\cap B\subset C$（**⑥**）が示された.

実数 x について， $-1\leqq\cos\dfrac{x}{9}\leqq 1$， $-1\leqq\sin\dfrac{x}{12}\leqq 1$ が成り立つから

$$f(x)=3\cos\frac{x}{9}+4\sin\frac{x}{12}\leqq 3\cdot 1+4\cdot 1=7$$

等号が成り立つのは， a， b を整数とすると

$$\frac{x}{9}=2a\pi \quad \text{かつ} \quad \frac{x}{12}=\frac{\pi}{2}+2b\pi$$

$$\therefore\quad x=18a\pi \quad \cdots\cdots① \quad \text{かつ} \quad x=24b\pi+6\pi \quad \cdots\cdots②$$

①，② より x を消去すると

$$18a\pi=24b\pi+6\pi \qquad \therefore\quad 3a-4b=1 \quad \cdots\cdots③$$

$3\cdot 3-4\cdot 2=1$　……④　であるから， ③－④ より

$$3(a-3)-4(b-2)=0 \qquad \therefore\quad 3(a-3)=4(b-2)$$

3， 4 は互いに素であるから， n を整数とすると

$$\begin{cases}a-3=4n\\b-2=3n\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}a=4n+3\\b=3n+2\end{cases}$$

① に代入すると　　$x=18(4n+3)\pi=(72n+54)\pi$　……⑤

よって $x=(72n+54)\pi$ のとき， $f(x)$ は最大値 $\boldsymbol{M=7}$ をとる.

また，⑤ より $f(x)=M$ となる最小の正の実数 x は， $n=0$ のとき　　$\boldsymbol{c=54\pi}$

$\boxed{\text{補足}}$

①，② を同時に満たす最小の x は，a， b に小さい順に自然数を代入して， $a=3$， $b=2$ のとき $x=54\pi$ とみつけてもよい.

$\boxed{\text{補足}}$終わり

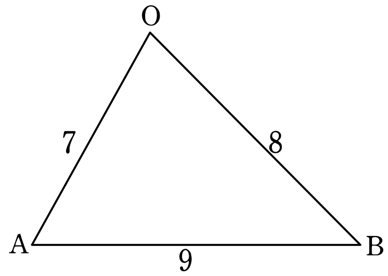
$\boxed{3}$

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=9$ であるから，両辺を 2 乗すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=81$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=7$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=8$ を代入すると

$$49-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+64=81 \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\mathbf{16}$$



(2)　(1) の結果を用いると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\left|t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$

$$=t^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{t^2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$=49t^2+\frac{64}{t^2}+16$$

$t>0$ より $t^2>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式により

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=49t^2+\frac{64}{t^2}+16\geqq 2\sqrt{49t^2\cdot\frac{64}{t^2}}+16=144$$

等号が成り立つのは　$49t^2=\dfrac{64}{t^2}$ かつ $t>0$ $\iff$ $t=\sqrt{\dfrac{8}{7}}=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$

よって，$t=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は最小値 $\sqrt{144}=\mathbf{12}$ をとる．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

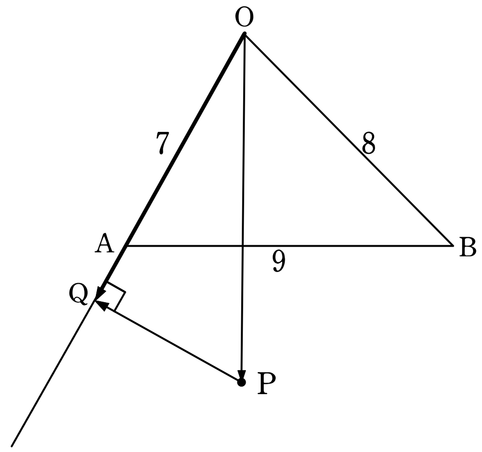
と表される．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=t|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=49t+\frac{16}{t}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{49t+\dfrac{16}{t}}{7^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(t+\frac{16}{49t}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$



よって $t>0$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\left|\left(t+\dfrac{16}{49t}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left(t+\dfrac{16}{49t}\right)\cdot 7$

ここで $t>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式により

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=7\left(t+\frac{16}{49t}\right)\geqq 7\cdot 2\sqrt{t\cdot\frac{16}{49t}}=8$$

等号が成り立つのは　$t=\dfrac{16}{49t}$ かつ $t>0$ $\iff$ $t=\dfrac{4}{7}$

したがって，$t=\dfrac{4}{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は最小値 $\mathbf{8}$ をとる．

$\boxed{\text{別解}}$　正射影ベクトルの公式を覚えていない場合は，ベクトル方程式と内積を用いればよい．

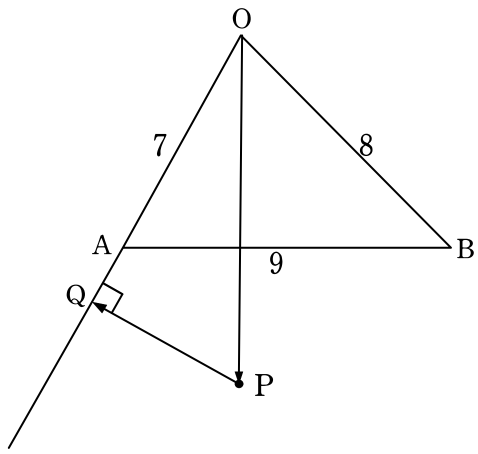
Q は直線 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 上にあるから， k を実数とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots\cdots ①$$

とおける．これを用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\left(t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$=(k-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

よって　　$\left\{(k-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$$(k-t)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$49(k-t)-\frac{16}{t}=0 \qquad \therefore \quad k=t+\frac{16}{49t}$$

① に代入すると　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t+\frac{16}{49t}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

（最小値に関しては，以下同じ）

$\boxed{\text{別解}}$終わり

$\boxed{4}$

$$x^4+11x^3+31x^2+11x+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

$x=0$ は (*) を満たさないから，$x \fallingdotseq 0$ のとき両辺を x^2 で割ると

$$x^2+11x+31+\frac{11}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+31=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+29=0$$

$y=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと　　$y^2+11y+29=0$

この方程式の 2 解を A，B とすると，解と係数の関係により

$$A+B=-11 \quad \cdots\cdots①, \qquad AB=29 \quad \cdots\cdots②$$

また，4 次方程式 (*) の 4 つの解を α，β，γ，δ とすると

$x+\dfrac{1}{x}=A$，すなわち $x^2-Ax+1=0$ の 2 解を α，β,

$x+\dfrac{1}{x}=B$，すなわち $x^2-Bx+1=0$ の 2 解を γ，δ,

とおくことができるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=A, \quad \alpha\beta=1 \quad \cdots\cdots③, \quad \gamma+\delta=B, \quad \gamma\delta=1 \quad \cdots\cdots④$$

よって

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=A+B=-11$$

また，

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\\&=A^2+B^2-4=(A+B)^2-2AB-4\\&=(-11)^2-2\cdot 29-4=59\end{aligned}$$

さらに，

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta)\\&=A^3-3A+B^3-3B\\&=(A+B)^3-3AB(A+B)-3(A+B)\\&=(-11)^3-3\cdot 29\cdot(-11)-3\cdot(-11)=-341\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解１}}$　相反方程式の解の対称性を用いて計算してもよい.

③，④ より　　$\alpha\beta=1$，$\gamma\delta=1 \iff \beta=\dfrac{1}{\alpha}$，　$\delta=\dfrac{1}{\gamma}$

また，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=A$，$\gamma+\dfrac{1}{\gamma}=B$ が成り立つから，

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+\frac{1}{\alpha}+\gamma+\frac{1}{\gamma}=A+B=-11$$

同様に計算すると

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2&=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+\gamma^2+\frac{1}{\gamma^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)^2-4\\&=A^2+B^2-4=(A+B)^2-2AB-4\\&=(-11)^2-2\cdot29-4=\mathbf{59}\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3&=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}+\gamma^3+\frac{1}{\gamma^3}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)^3-3\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)\\&=A^3+B^3-3(A+B)=(A+B)^3-3AB(A+B)-3(A+B)\\&=(-11)^3-3\cdot29\cdot(-11)-3\cdot(-11)=-11(121-87-3)=\mathbf{-341}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解１}}$終わり

$\boxed{\text{別解２}}$　4 次方程式の解と係数の関係を用いてもよい.

4 次方程式 (*) が 4 つの解 α，β，γ，δ を持つとき，次の式が成り立つ.

$$x^4+11x^3+31x^2+11x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

右辺を展開すると

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)&=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\{x^2-(\gamma+\delta)x+\gamma\delta\}\\&=x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2\\&\quad-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta\end{aligned}$$

となるから，両辺の各項の係数を比較すると

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=-11\\\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=31\\\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-11\\\alpha\beta\gamma\delta=1\end{cases}$$

これらを用いると　　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}=\dfrac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}=\dfrac{-11}{1}=\mathbf{-11}$

また　　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$

$$=(-11)^2-2\cdot31=\mathbf{59}$$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3$ もこれらを用いて求めることができるが，計算が煩雑になる.

$\boxed{\text{別解２}}$終わり