2022年度　順天堂大学

【 講 評 】

やや難化しているが、実は処理量自体は多くなく、手際よく立式できたかが問われる。とはいえ、状況把握が難しい問題もあるため、6割以上確保したい。

$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{第 1 問}}$ は小問集合。典型問題ばかりであり、素早い処理が求められる。

$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{第 2 問}}$ は万有引力による楕円運動の問題。問題文はややこしいが、計算する内容自体は単純である。最終問以外は処理も少ないので、見た目に圧倒されず解き進めることができたかどうか。

$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{第 3 問}}$ は光の干渉とレンズの問題。いずれも基本的な問題であり、完答したい。

$\boxed{\text{II}}$ は自己誘導および相互誘導の問題。落ち着いて回路方程式を立てれば基本的なコイルの知識のみで解けるのだが、気付けなかった受験生も多かっただろう。

【 解 答 ・ 解 説 】

$\boxed{\mathrm{I}}$

第１問

解答

1	④	2	④	3	①	4	⑥
5	⑧	6	⑥	7	③	8	⑦

解説

問１　D 点周りのモーメントのつりあいより、

$$mg \cdot \sqrt{2}a \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = N_B \cdot 2a,$$

より、$N_B = (\sin\theta + \cos\theta)mg/2$ である。

問２　衝突後の物体 A の速さを V とする。運動量保存則は、

$$mv\cos 60^\circ = mV\cos\theta,$$
$$-mv\sin 60^\circ = mV\sin\theta - 4m \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}\, v.$$

以上から $\tan\theta = \sqrt{3}/3$ である。

運動量保存の式より、$V = v/\sqrt{3}$ がわかる。よって、

$$E - E' = \frac{1}{2}\, mv^2 - \left(\frac{1}{2}\, mV^2 + \frac{1}{2}\,(4m) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\, v\right)^2\right) = \frac{1}{6}\, mv^2.$$

問３　始点の電位に対する終点の電位が最大の経路を選べばよい。① は -5 V、② は 1 V、③ は 0 V、④ は 2 V、⑤ は 1 V、⑥ は 3 V であるから、⑥ である。

問４　左側の気体を A、右側の気体を B とラベリングすると、ピストンに加える力 F は $F = -p_{\mathrm{A}}S + p_{\mathrm{B}}S$ である。これとポアソンの法則、および初期状態での圧力が nRT/SL であることより、

$$F = -p_{\mathrm{A}}S + p_{\mathrm{B}}S = \frac{nRT}{L}\left(-\left(\frac{S(L+x)}{SL}\right)^{-5/3} + \left(\frac{S(L-x)}{SL}\right)^{-5/3}\right) = \frac{nRT}{L}\left(\left(1-\frac{x}{L}\right)^{-5/3} - \left(1+\frac{x}{L}\right)^{-5/3}\right).$$

これに近似式を用いると、$F = (nRT/L) \cdot (10x/3L) =: kx$ となる。ばねの弾性エネルギーと同様の理由により、求めるエネルギーは、

$$\mathit{\Delta} U = \frac{1}{2}\, kx^2 = \frac{5nRTx^2}{3L^2}.$$

問５　マイヤーの関係式により、定圧モル比熱 C_p は $C_v + R$ に一致。$Q = nC_p\mathit{\Delta} T$ および状態方程式より $p\mathit{\Delta} V = nR\mathit{\Delta} T$ となることとから、$\mathit{\Delta} V = (R/(C_v + R)) \cdot Q/p$ である。

問６　エネルギーの関係式より、$p^2/2m = eV$ である。また、物質波の運動量 p は h/λ である。以上より、$V = h^2/2e\lambda^2 m$ である。

第 2 問

解答

1	⑦	2	①	3	②	4	⑥
5	⑧	6	⑤	7	③		

解説

問 1　点 A について、太陽の引力による加速度は GM/r_0^2、半径 R の円運動の向心加速度は v_0^2/R であり、これらが等しいことから、$R = v_0^2 r_0^2/GM$ である。

同様に点 B についての円運動の半径は $R' = v_1^2 r_1^2/GM$ である。$R = R'$ より、$v_0/v_1 = r_1/r_0$ が得られる。

問 2　角度 $\varDelta\theta$ で半径 r の扇形の面積を時間 $\varDelta t$ で割ったものが求める面積速度であるから、求める面積速度は $S = (r^2/2)\cdot(\varDelta\theta/\varDelta t)$ である。

運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}\,m\left(v_\parallel^2 + v_\perp^2\right) = \frac{1}{2}\,m\left(\left(\frac{r\varDelta\theta}{\varDelta t}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta r}{\varDelta t}\right)^2\right) = \frac{2mS^2}{r^2} + \frac{2mS^2}{r^4}\left(\frac{\varDelta r}{\varDelta\theta}\right)^2.$$

問 3　E は運動エネルギーと万有引力による位置エネルギーの和で計算できるので、面積速度 S が一定であることに注意すると、点 A と点 B でのエネルギーより、

$$E = \frac{2mS^2}{r_0^2} - \frac{GmM}{r_0^2} = \frac{2mS^2}{r_1^2} - \frac{GmM}{r_1^2},$$

がわかる。この連立方程式から、$E = -GmM/(r_1 + r_0)$ および $S = \sqrt{(GM/2)\cdot(r_0 r_1/(r_0 + r_1))} = (b/2)\cdot\sqrt{GM/a}$ を得る。

楕円の面積は πab であるから、求める周期は、

$$\frac{\pi ab}{S} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = \frac{\pi(r_1 + r_0)^{3/2}}{\sqrt{2GM}}.$$

問 4　エネルギー保存則より、

$$E = \frac{2mS^2}{r^2} + \frac{2mS^2}{r^4}\left(\frac{\varDelta r}{\varDelta\theta}\right)^2 - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{r_1 + r_0}.$$

これに S の値を代入すると、

$$\frac{\varDelta r}{\varDelta\theta} = r\sqrt{\frac{(r_1 - r)(r - r_0)}{r_1 r_0}}.$$

第3問

解答

1	⑤	2	②	3	③	4	③	5	⑦	6	⑧

解説

問1　a,b の光線の経路差は $2dx/\ell$ であり、b の光線は反射により位相が π だけ進むことに注意すると、明線条件は、非負整数 m を用いて $2dx/\ell = \lambda(m+1/2)$ である。

問2　前問の結果より、明線の間隔 Δx とすると、$2d\Delta x/\ell = \lambda$ である。これに与えられた数値を代入すると、$d = 3.6\times10^{-5}$ m を得る。

問3　波長が屈折率の逆数倍になることから、Δx は光路差の逆数倍になる。よって、$\Delta x = 2.5/1.3$ m $\fallingdotseq 1.9$ m となる。

問4

$$\frac{1}{\mathrm{OP}} - \frac{1}{\mathrm{OP'}} = -\frac{1}{f},$$

が成立するので、$\mathrm{OP} = \ell$ より、

$$\frac{\mathrm{P'Q'}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}} = \frac{f}{\ell+f}.$$

問5　前問で $\mathrm{OP} = \ell$ の代わりに $\mathrm{OP'} = D$ とすれば、

$$\frac{\mathrm{P'Q'}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}} = \frac{f-D}{f}.$$

問6

$$\frac{f}{\ell+f} = \frac{f-D}{f},$$

より、$D = f\ell/(\ell+f)$ である。

II

解答

1	$M=\dfrac{\mu N_1N_2S}{\ell},\ L_1=\dfrac{\mu N_1^2S}{\ell}$	2	$-L_1\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t}-M_0\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t}$	3	$\dfrac{V}{L_1+L_2+2M}$
4	$\dfrac{V_0}{\omega(L_1+L_2+2M)}\sin\omega t$	5	$\dfrac{(L_2-M)V_0}{\omega(L_1L_2-M^2)}\sin\omega t$	6	$\dfrac{V_0^2}{2\omega^2}\left(\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_2}\right)$

解説

問 1　コイル 2 に生じる誘導起電力の電圧の大きさは、コイル 2 を貫く磁束 Φ_2 を用いて、ファラデーの法則より $v_2=N_2|\Delta\Phi_2/\Delta t|$ である。コイル 1 により発生する磁束の変化は $\Delta\Phi_1=BS=(\mu N_1S/\ell)\Delta I_1$ となり、$\Phi_1=\Phi_2$ であることを考えれば、$M_0=\mu N_1N_2S/\ell$ を得る。

コイル 1 の自己インダクタンスは、上の議論を $N_2\to N_1$ とすれば同様に計算でき、$L_1=\mu N_1^2S/\ell$ である。

問 2　正の電流変化に対し、自己誘導も相互誘導も a に対する b の電位を下げる方向に働く。よって、求める電位は

$$-L_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}-M_0\frac{\Delta I_2}{\Delta t}.$$

問 3　コイル 1,2 の誘導起電力と電源電圧を用いた回路方程式は、

$$V-(L_1+M)\frac{\Delta I_1}{\Delta t}-(L_2+M)\frac{\Delta I_2}{\Delta t}=0.$$

いま、$I_1=I_2=I$ であるから、$\Delta I/\Delta t=V/(L_1+L_2+2M)$ である。

(この問題では相互インダクタンスが一致することを仮定しているが、この問題に限らず相反定理により相互インダクタンスは常に一致する。)

問 4　前問題の結果より、コイル 1 と 2 は併せて自己インダクタンス L_1+L_2+2M のコイルとみなすことができる。コイルの電流の位相は電圧に比べて $\pi/2$ 遅れ、インピーダンスは ωL であるので、

$$I=\frac{V_0}{\omega L}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{V_0}{\omega(L_1+L_2+2M)}\sin\omega t.$$

問 5　回路方程式は、

$$V=L_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+M\frac{\Delta I_2}{\Delta t}=L_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}+M\frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

となる。ここから $\Delta I_2/\Delta t$ を消去すると、

$$V=\frac{L_1L_2-M^2}{L_2-M}\frac{\Delta I_1}{\Delta t},$$

となり、I_1 はインダクタンス $(L_1L_2-M^2)/(L_2-M)$ のコイルに電源をつないだ時の電流と一致する。よって、

$$I_1=\frac{(L_2-M)V_0}{\omega(L_1L_2-M^2)}\sin\omega t.$$

問 6　$M=0$ とすると、$t=\pi/2\omega$ では、$I_1=V_0/\omega L_1$ および $I_2=V_0/\omega L_2$ となるため、エネルギーの和は

$$\frac{1}{2}\ L_1I_1^2+\frac{1}{2}\ L_2I_2^2=\frac{V_0^2}{2\omega^2}\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right).$$