解答速報 物理

医学部受験専門予備校 慧修会

2022年度　東海大学　1日目

【講　評】

問題ごとの難易度の差がやや大きい。$\boxed{4}$を完答し、全体で 65 %強を確保したい。

$\boxed{1}$はモーメントのつりあいの問題。慣れていない受験生も多かったことと思うが、対称性に着目して重心の条件を見出せば容易。一方、座標を置いて処理しようとすると時間がかかってしまう。差がついた問題だろう。

$\boxed{2}$はコンデンサー回路の問題。前半は解答のように電位をおいて処理すれば機械的に答えが求められる。後半は最終的な回路の状態から逆算できるかどうか。

$\boxed{3}$は U 字管の問題。着目する変量が多く、混乱しかねない。気体変化が断熱変化であるので、ポアソンの法則になれていないと難しいだろう。

$\boxed{4}$はドップラー効果の問題。単振動が絡んでいるものの全体を通して非常に基本的であり、落とせない。

【解　答　・　解　説】

$\boxed{1}$

解答

(1) $\dfrac{\sqrt{3}(m_{\mathrm{B}}-m_{\mathrm{C}})}{-2m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a$　　(3) π

(4) $\dfrac{\pi}{2}$　　(5) $\dfrac{3}{2}M$

解説

(1) 原点 O 周りのモーメントのつりあい式は、原点から各頂点への距離を r として、

$$m_{\mathrm{A}}r\sin\theta+m_{\mathrm{B}}r\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+m_{\mathrm{C}}r\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=0,$$

となる。これを解いて、答を得る。

(2) 直線 AO についての対称性より、重心は直線 AO 上にある。また、$m_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}$ により、頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の足を H とすると、全体の重心は線分 AH の中点にあることがわかる。O は線分 AH を 2:1 に内分する点であり、線分 AH の長さは $(\sqrt{3}/2)a$ であることから、答を得る。

(3) (1) の解答に代入することで、つりあって静止する角度は $\theta=0,\pi$ であることがわかる。一方、安定なつりあい状態では、全体の重心が O より鉛直下側になければならない。全体の重心は O より A 側に寄っていることから、そのような角度は π であるとわかる。

(4) (1) の解答に代入することで、つりあって静止する角度は $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ であることがわかる。この角度では、直線 AO は水平となるため、B と C のうち重い方が鉛直下側にある場合安定となる。$m_{\mathrm{B}}>m_{\mathrm{C}}$ より、そのような角度は $\pi/2$ である。

(5) このとき、全体の重心が O に一致する。その場合、O を通り直線 AC に平行な直線の両側についてのつりあいを考えると、辺 AC 上の質量が m_{B} の 2 倍とならなくてはならない。このことから、求める質量は $(3/2)M$ である。

$\boxed{2}$

解答

(1) $\dfrac{R}{V}$　(2) $\dfrac{1}{3}\,V$　(3) $\dfrac{1}{6}\,CV^2$

(4) $\dfrac{1}{6}\,V$　(5) $\dfrac{1}{2}\,V$

解説

(1) 便宜上、コンデンサーに左から 1,2,3 と番号付けをする。
抵抗器を接続した直後の A 点の電位 V_{A} と D 点の電位 V_{D} は、コンデンサー 2,3 に電荷がなく $V_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{D}}$ となることから、$V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{D}} = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}} = V$ となる。よって、抵抗に流れる電流は V/R となる。

(2) B 点周りの電荷保存則、および C 点周りの電荷保存則は、それぞれ

$$C(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}) + C(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{C}}) = -CV,$$
$$C(V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{B}}) + C(V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}}) = 0.$$

$V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{D}}$ に注意して辺々引き算すると、$V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{B}} = V/3$ が導かれる。

(3) 前問の結果より、コンデンサー 1,2,3 の電圧はそれぞれ $(2/3)V, (1/3)V, (1/3)V$ である。抵抗で発生したジュール熱はコンデンサーに蓄えられたエネルギーの差分から求められ、

$$\frac{1}{2}CV^2 - \frac{1}{2}C\left(\frac{4}{9}\,V^2 + \frac{1}{9}\,V^2 + \frac{1}{9}\,V^2\right) = \frac{1}{6}\,CV^2.$$

(4) 抵抗器を AD 間に接続し十分時間が経過した後について、$V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{D}}$ が成立し、さらに点 B 周りの電荷保存則により、

$$C(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}) + C(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{C}}) = -CV,$$

が成立する。これにより、$V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{B}} = (1/2)V$ であるから、点 C 周りの電荷の合計は $(1/2)CV$ となる。(2) の状態ではコンデンサー 2 の右側極板には $(1/3)CV$ の電荷があったから、コンデンサー 3 の左側極板に $(1/6)CV$ の電荷がたまるよう、CD 間の電位差に $(1/6)V$ を与えればよいことがわかる。

(5) 前問の途中経過より、$V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}} = (1/2)V$ がわかる。

3

解答

(1) ウ　(2) オ　(3) エ　(4) エ　(5) ア

解説

(1) 左側の液面が x だけ上がると、右側の液面は x だけ下がる。これにより、右側液面より上側にある左側の液体の質量は $2Sx\rho$ と表せ、それにかかる重力が復元力の大きさである。

(2) 液体の質量は $SL\rho$ であるので、x の加速度 a についての運動方程式は、

$$a = -\frac{2S\rho g}{SL\rho}x = -\frac{2g}{L}x.$$

これより、x は単振動し、その角振動数は $\sqrt{2g/L}$ であるため、周期は $\pi\sqrt{2L/g}$ である。

(3) 圧力 P および体積 V について、$PV^{5/3}$ が一定であるから、

$$P(S\ell)^{5/3} = (P+\Delta P)(S(\ell-x))^{5/3} \fallingdotseq (P+\Delta P)(S\ell)^{5/3}\left(1-\frac{5x}{3\ell}\right)$$

より、

$$\Delta P = \frac{5x}{3\ell-5x}\ P \fallingdotseq \frac{5x}{3\ell}\ P.$$

(別解)

$$\Delta\left(PV^{5/3}\right) \fallingdotseq PV^{5/3}\left(\frac{\Delta P}{P}+\frac{5}{3}\frac{\Delta V}{V}\right) = 0,$$

が成立する。これと $\Delta V/V = -x/\ell$ により、$\Delta P \fallingdotseq (5x/3\ell)P$ が成立する。

(4) 圧力の変化も考慮して運動方程式を立てると、

$$a = -\frac{2Sx\rho g + \Delta PS}{SL\rho} = -\frac{2g+(5x/3\ell)P}{L},$$

となる。この角振動数は $\sqrt{(2g+(5x/3\ell)P)/L}$ であるため、周期は $\pi\sqrt{2L/(g+(5x/6\ell)P)}$ である。

(5) ポアソンの法則から圧力を消去すると、温度 T と体積 V について $TV^{2/3}$ が一定となることがわかる。液面が $x \to 0$ となるとき、

$$T(S\ell)^{2/3} = (T+\Delta T)(S(\ell+x))^{2/3} \fallingdotseq (T+\Delta T)(S\ell)^{2/3}\left(1+\frac{2x}{3\ell}\right),$$

となるので、

$$\Delta T = \frac{-2x}{3\ell+2x}\ T \fallingdotseq -\frac{2x}{3\ell}\ T.$$

液面が $x \to -x$ となるときは、この倍変化するので、$\Delta T = -(4x/3\ell)T$ となる。

(別解)　ボイル・シャルルの法則より、

$$\Delta\left(\frac{PV}{T}\right) \fallingdotseq \frac{PV}{T}\left(\frac{\Delta(PV)}{PV}-\frac{\Delta T}{T}\right) = 0.$$

液面が $x \to 0$ となるとき、(3) の逆過程を考えることとなり、

$$\frac{\Delta(PV)}{PV} \fallingdotseq \frac{V\Delta P + P\Delta V}{PV} = -\frac{2x}{3\ell}.$$

このとき、$\Delta T/T = -2x/3\ell$ となる。液面が $x \to -x$ となるときは、この倍変化するので、$\Delta T = -(4x/3\ell)T$ となる。

$\boxed{4}$

解答

(1) イ　(2) エ　(3) ウ　(4) オ　(5) ウ

解説

(1) 台の運動方程式は、加速度 a として

$$a = -\frac{k}{m}\,x,$$

となる。振幅 r、角振動数 $\sqrt{k/m}$、$t=0$ での位置 $x=r$ であるから、台の位置は $x = r\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$ となる。

(2) Δt の間に、音源は $u\Delta t$ だけ進み、その間に波を $f\Delta t$ 個だけ出す。そのため、$V\Delta t - u\Delta t$ の距離の区間に $f\Delta t$ 個の波があることになるため、求める波長は $(V-u)/f$ となる。

(3) 速度が x 正方向に最大であるときに発せられた音が振動数最大となる。その最初の時刻は、周期の 3/4 だけ経過した時刻であるから、$t = (3\pi/2)\sqrt{m/k}$ である。

(4) (3) の時点を $t=0$ とおくと、音源の位置は $x = r\sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$ と表せる。(3) の音は L/V の時間の後観測者に届くため、そのときの音源の位置は、$r\sin\left(\sqrt{k/m}\,(L/V)\right)$ である。

(5) 音源の速さの最大値 v_m は、単振動の振幅と角振動数の積であり $r\sqrt{k/m}$ である。よって、求める振動数は、

$$\frac{V}{V-v_m}\,f = \frac{V}{V-r\sqrt{k/m}}\,f,$$

となり、これは f の $V/\left(V-r\sqrt{k/m}\right)$ 倍である。