

# 2022年度 昭和大学 I期

## 【 講 評 】

例年通り大問4題で出題された。昨年よりも小問集合が1題少なくなったが、全体の難易度はやや下がり、解きやすくなった。1次試験突破のために、全体で7割は確保したい。

### ① 複素数平面 (数学Ⅲ) 【標準】

複素数平面上の点の軌跡に関する典型問題であったが、文字が多いこともあり、 $t$ が実数であることが読み取れなかった人が多いのではないだろうか。出来の分かれる問題である。

### ② ベクトル (数学B) 【やや易】

三角形の垂心や外心に関するベクトルの典型問題であった。受験生であれば、誰もが一度は解いたことのあるような問題だろう。ここは落とせない問題である。

### ③ 小問集合 ((1) 関数の極限 (数Ⅲ) / (2) 積分法 (数Ⅲ)) 【標準】

(1)は点の極限を求める問題であった。三角関数の極限公式に変形していただけたが、やや計算が面倒である。答えを出すことだけを考えて、ロピタルの定理が使えると楽である。(2)は定積分数列の漸化式に関する典型問題であり、落とせない問題である。

### ④ 場合の数 (数学A) 【標準】

同じものを含む順列に関する典型問題であった。(2-4)だけはやや難易度が高いため、(2-3)までを確実に得点したい。

## 【 解 答 】

① (1)  $\frac{1}{2}$ , (2)  $\frac{1}{2}$ , (3) 1, (4) -2, (5)  $\frac{\pi}{6}$

② (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ , (2)  $\vec{OH} = \frac{6}{11}\vec{a} + \frac{3}{11}\vec{b}$ , (3)(a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , (b)  $\frac{\sqrt{33}}{4}$

(4)  $\frac{\sqrt{165}}{11}$ , (5)  $\vec{OG} = \frac{5}{22}\vec{a} + \frac{4}{11}\vec{b}$

③ (1)(1-1)  $Q\left(\cos\frac{\pi}{2}t, \sin\frac{\pi}{2}t\right)$ ,  $R\left(-1, \frac{t - \sin\frac{\pi}{2}t + t\cos\frac{\pi}{2}t}{\cos\frac{\pi}{2}t}\right)$ , (1-2)  $\left(-1, 1 - \frac{2}{\pi}\right)$

(2)(2-1)  $\frac{\pi}{4}$ , (2-2)  $I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3}I_n$ , (2-3)  $\frac{5}{32}\pi$

④ (1) 120,

(2)(2-1) 453600, (2-2) 20160, (2-3) 451080, (2-4) 287280

お問い合わせは ☎0120-302-872

<https://keishu-kai.jp/>

【 解 説 】

1

$z = \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}$  のとき, ド・モアブルの定理から,

$$z^3 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

よって,  $2\alpha z^3 = (1-t)\alpha + t$  のとき,

$$(1 + \sqrt{3}i)\alpha = (1-t)\alpha + t$$

$$\sqrt{3}i\alpha = (1-\alpha)t \quad \therefore t = \frac{\sqrt{3}i\alpha}{1-\alpha}$$

$t$  は実数であるので,  $t = \bar{t}$  より,

$$\frac{\sqrt{3}i\alpha}{1-\alpha} = \overline{\left(\frac{\sqrt{3}i\alpha}{1-\alpha}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{3}i\alpha}{1-\alpha} = \frac{-\sqrt{3}i\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}$$

$\alpha \neq 1$  のもとで分母を払って,

$$\alpha(1-\bar{\alpha}) = -\bar{\alpha}(1-\alpha)$$

$$2\alpha\bar{\alpha} - \alpha - \bar{\alpha} = 0$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad \therefore \left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

よって, 複素数  $\alpha$  のえがく図形は,  $\frac{1}{2}$  を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の円である.

ただし, 点  $1$  を除く.

次に,  $\beta = \frac{z^6}{\alpha}$  のとき,  $z^6 = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  より,

$$\alpha = \frac{z^6}{\beta} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2\beta}$$

これを  $\textcircled{1}$  に代入すると,

$$\left|\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2\beta} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{-\beta - 1 + \sqrt{3}i}{2\beta}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore |\beta| = |\beta - (-1 + \sqrt{3}i)| \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

よって, 複素数  $\beta$  のえがく図形は, 2点  $0, \sqrt{3}i$  を結ぶ線分の垂直二等分線である.

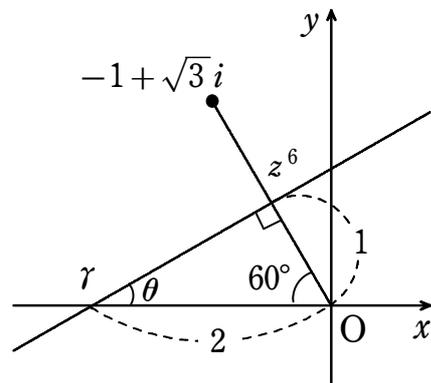
この図形と実軸の交点  $\gamma$  は, 図から

$$\gamma = -2$$

また,  $\theta = \arg\left(1 - \frac{z^6}{\gamma}\right)$  のとき

$$\theta = \arg \frac{\gamma - z^6}{\gamma} = \arg \frac{z^6 - \gamma}{0 - \gamma}$$

より,  $\theta$  は  $\angle z^6 \gamma 0$  を表しているのので, 図から  $\theta = \frac{\pi}{6}$



**別解**  $\gamma$  と  $\theta$  は計算で求めることもできる.

② において,  $\beta = \gamma$  ( $\gamma$  は実数) を代入すると,

$$|\gamma - (-1 + \sqrt{3}i)| = |\gamma|$$

$$|(\gamma + 1) - \sqrt{3}i|^2 = |\gamma|^2$$

$$(\gamma + 1)^2 + (\sqrt{3})^2 = \gamma^2 \quad \therefore \gamma = -2$$

また,

$$1 - \frac{z^6}{\gamma} = 1 - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{-2} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{よって, } \theta = \arg \left( 1 - \frac{z^6}{\gamma} \right) = \frac{\pi}{6}$$

**別解** 終わり

2

(1)  $\triangle OAB$  で余弦定理を用いると、

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos \angle AOB$$

$$3 = 4 + 5 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 3$$

(2)  $\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$  とおく。

H は  $\triangle OAB$  の垂心であるので、 $AH \perp OB$ ,  $BH \perp OA$  より

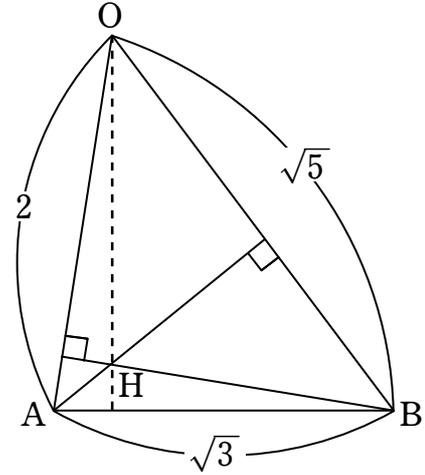
$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{b} = \{(x-1)\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}\} \cdot \overrightarrow{b} = (x-1)\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + y|\overrightarrow{b}|^2 = 0$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{a} = \{x\overrightarrow{a} + (y-1)\overrightarrow{b}\} \cdot \overrightarrow{a} = x|\overrightarrow{a}|^2 + (y-1)\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

$$\begin{cases} 3(x-1) + 5y = 0 \\ 4x + 3(y-1) = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

これを解いて  $x = \frac{6}{11}$ ,  $y = \frac{3}{11}$

したがって  $\overrightarrow{OH} = \frac{6}{11}\overrightarrow{a} + \frac{3}{11}\overrightarrow{b}$



(3) 3点 O, H, D は同一直線上より、 $k$  を実数として、

$$\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OH} = \frac{6}{11}k\overrightarrow{a} + \frac{3}{11}k\overrightarrow{b}$$

とかける。3点 A, B, D は同一直線上より、係数の和が 1 であるから、

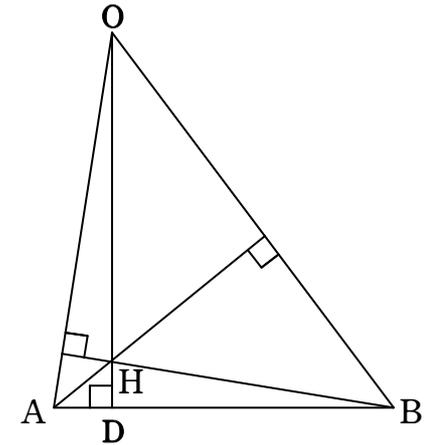
$$\frac{6}{11}k + \frac{3}{11}k = 1 \quad \therefore k = \frac{11}{9}$$

よって、 $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$  より  $AD : DB = 1 : 2$

ゆえに  $l_1 = AD = \frac{1}{3}AB = \frac{\sqrt{3}}{3}$

また、H は  $\triangle OAB$  の垂心より  $OD \perp AB$  から、三平方の定理より

$$l_2 = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{33}}{3}$$



(4)  $\angle AOB = \theta$  とすると  $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より  $\sin \theta > 0$  であるから  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$

よって、 $\triangle OAB$  に正弦定理を用いると、

$$2R = \frac{AB}{\sin \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{165}}{11} \quad \therefore R = \frac{\sqrt{165}}{11}$$

(5) 三角形において、外心  $G$ 、重心  $P$ 、垂心  $H$  はこの順に同一直線上に存在し、 $HP : HG = 2 : 3$  が成り立つ。(  $G, P, H$  通る直線をオイラー線という。 )

よって、 $\overrightarrow{HG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HP}$  であり、 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$  から、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OH} + \frac{3}{2}\overrightarrow{HP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OH} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{6}{11}\vec{a} + \frac{3}{11}\vec{b}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{5}{22}\vec{a} + \frac{4}{11}\vec{b}\end{aligned}$$

**別解1** (2)は正射影ベクトルと、メネラウスの定理を用いてもよい。  
直線  $BH$  と  $OA$  の交点を  $M$ 、直線  $AH$  と  $OB$  の交点を  $N$  とする。

$\overrightarrow{OM}$  は  $\vec{b}$  の  $\vec{a}$  方向への正射影ベクトルより

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{3}{4}\vec{a}$$

$\overrightarrow{ON}$  は  $\vec{a}$  の  $\vec{b}$  方向への正射影ベクトルより

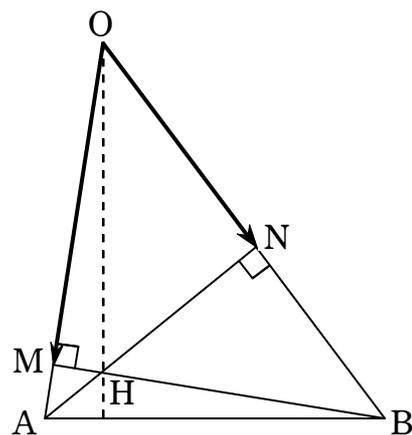
$$\overrightarrow{ON} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3}{5}\vec{b}$$

よって  $OM : MA = 3 : 1$ 、 $ON : NB = 3 : 2$

ゆえに、メネラウスの定理から、

$$\frac{AH}{HN} \cdot \frac{NB}{BO} \cdot \frac{OM}{MA} = \frac{AH}{HN} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{1} = 1 \quad \therefore AH : HN = 5 : 6$$

したがって、 $\overrightarrow{OH} = \frac{6}{11}\vec{a} + \frac{3}{11}\vec{b}$



**別解1** 終わり

**別解2** 本解はオイラー線を用いたが、標準的な外心の位置ベクトルの求め方は、次のようになる。

$\overrightarrow{OG} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とおき、辺  $AB, AC$  の中点をそれぞれ  $X, Y$  とする。

$G$  は  $\triangle OAB$  の外心であるので、 $GX \perp OA$ 、 $GY \perp OB$  が成り立つ。

よって、 $\overrightarrow{OX}$  は  $\overrightarrow{OG}$  の  $\overrightarrow{OA}$  方向への正射影ベクトルから

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OX}| = 2$$

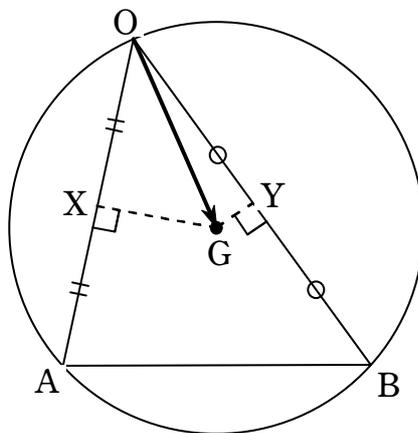
$\overrightarrow{OY}$  は  $\overrightarrow{OG}$  の  $\overrightarrow{OB}$  方向への正射影ベクトルから

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OY}| = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OA} = s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = 4s + 3t = 2 \\ \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OB} = s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 3s + 5t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

これを解いて  $s = \frac{5}{22}$ 、 $t = \frac{4}{11}$

したがって  $\overrightarrow{OG} = \frac{5}{22}\vec{a} + \frac{4}{11}\vec{b}$



**別解2** 終わり

**3**

(1)(1-1) Pの座標を $(0, t)$ とすると、点P, Qは出発してから時刻 $t$ だけ経過している。

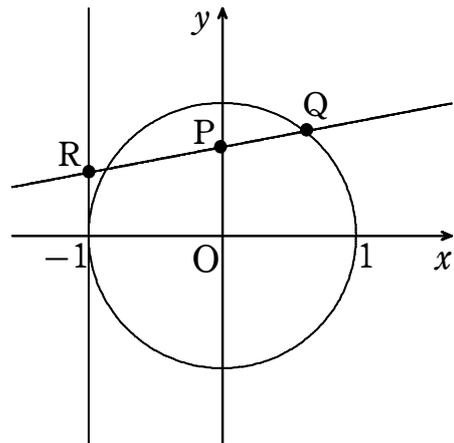
点Qは $x^2 + y^2 = 1$ の周上を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ の速さで動くことから、時刻 $t$ の時点では

$\frac{\pi}{2}t$ だけ進んでいる。よって、Qの座標は $(\cos \frac{\pi}{2}t, \sin \frac{\pi}{2}t)$

このとき、直線QRの方程式は  $y = \frac{\sin \frac{\pi}{2}t - t}{\cos \frac{\pi}{2}t}x + t$

$x = -1$ のとき  $y = \frac{t - \sin \frac{\pi}{2}t + t \cos \frac{\pi}{2}t}{\cos \frac{\pi}{2}t}$

よって、Rの座標は  $(-1, \frac{t - \sin \frac{\pi}{2}t + t \cos \frac{\pi}{2}t}{\cos \frac{\pi}{2}t})$



(1-2) 点Rの $y$ 座標を $f(t)$ とおく。

$\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2} = \theta$ とおくと、 $t \rightarrow 1-0$ のとき $\theta \rightarrow +0$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1-0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{t - \sin \frac{\pi}{2}t + t \cos \frac{\pi}{2}t}{\cos \frac{\pi}{2}t} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 + \frac{2}{\pi}\theta - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \left(1 + \frac{2}{\pi}\theta\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 + \frac{2}{\pi}\theta - \cos\theta + \left(1 + \frac{2}{\pi}\theta\right)(-\sin\theta)}{-\sin\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left( -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\sin\theta} - \frac{\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \cdot \theta + 1 + \frac{2}{\pi}\theta \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 + \frac{2}{\pi} \cdot 0 = 1 - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

したがって、Rは点 $(-1, 1 - \frac{2}{\pi})$ に近づく。

**別解** 答えを出すだけであれば、ロピタルの定理を用いるとはやい。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1-0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{\left(t - \sin \frac{\pi}{2}t + t \cos \frac{\pi}{2}t\right)'}{\left(\cos \frac{\pi}{2}t\right)'} = \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{1 - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}t + \cos \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}t \sin \frac{\pi}{2}t}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}t} \\ &= \frac{1 - \frac{\pi}{2} \cdot 0 + 0 - \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot 1}{-\frac{\pi}{2} \cdot 1} = 1 - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

**別解** 終わり

$$(2) \quad x = \sin \theta \left( -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ とおくと } dx = \cos \theta d\theta, \quad \begin{array}{l|l} x & 0 \rightarrow 1 \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\text{よって, } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} \theta d\theta$$

(2-1)  $n=1$  のとき, 半角の公式より,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \left[ \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(2-2) 部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+3} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \cos^{n+2} \theta d\theta \\ &= \left[ \sin \theta \cdot \cos^{n+2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot (n+2) \cos^{n+1} \theta \cdot (-\sin \theta) d\theta \\ &= (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \cos^{n+1} \theta d\theta \\ &= (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n+1} \theta - \cos^{n+3} \theta) d\theta = (n+2)(I_n - I_{n+2}) \\ \therefore I_{n+2} &= \frac{n+2}{n+3} I_n \end{aligned}$$

(2-3) (2-1) より  $I_1 = \frac{\pi}{4}$  であるから

$$I_5 = \frac{5}{6} I_3 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} I_1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5}{32} \pi$$

**別解** 本解では置換積分を用いたが, これを用いずに(2-1), (2-2)を解くこともできる.

$$(2-1) \quad I_1 = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

これは, 半径1の四分円の面積を表しているので,  $I_1 = \frac{\pi}{4}$

(2-2) 部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n+2}{2}} dx = \int_0^1 1 \cdot (1-x^2)^{\frac{n}{2}+1} dx \\ &= \left[ x \cdot (1-x^2)^{\frac{n}{2}+1} \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \left( \frac{n}{2} + 1 \right) (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \cdot (-2x) dx \\ &= (n+2) \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx = (n+2) \int_0^1 \{1 - (1-x^2)\} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx \\ &= (n+2) \int_0^1 \left\{ (1-x^2)^{\frac{n}{2}} - (1-x^2)^{\frac{n}{2}+1} \right\} dx = (n+2)(I_n - I_{n+2}) \\ \therefore I_{n+2} &= \frac{n+2}{n+3} I_n \end{aligned}$$

**別解** 終わり

4

(1) SHOWA の 5 文字を一列に並べる順列の総数は  $5! = 120$  通り.

(2) HTTPSSHOWA の 10 文字について,

(2-1) 順列の総数は, H, T, S を 2 文字ずつ含む, 同じものを含む順列より,

$$\frac{10!}{2!2!2!} = 453600 \text{ 通り}$$

(2-2) SS という並びと TT という並びをともに含む順列は, SS と TT をペアにして考えると, H を 2 文字含むので,

$$\frac{8!}{2} = 20160 \text{ 通り}$$

(2-3) SHSH という並びを含む順列は, SHSH をペアにして考えると, H を 2 文字含むので,

$$\frac{7!}{2} = 2520 \text{ 通り}$$

したがって, SHSH を含まない順列は, これを順列の総数から除いて

$$453600 - 2520 = 451080 \text{ 通り}$$

(2-4) まずは, ST, TS の両方を含まない順列を求める.

まずは, S 以外の 8 文字を並べると  $\frac{8!}{2!2!} = 10080$  通り

このなかで,

(i) T が隣り合うのは  $\frac{7!}{2} = 2520$  通り

このとき, ST, TS という並びができないような順列は, 右下図の 6 箇所のうち, 1 箇所に 2 個 S が入るか, 2 箇所に 1 個ずつ S が入るかのいずれかより  $6 + {}_6C_2 = 21$  通り

よって  $2520 \times 21 = 52920$  通り

$$\begin{array}{cccccccc} T & T & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \end{array}$$

(ii) T が隣り合わないのは  $10080 - 2520 = 7560$  通り

このとき, ST, TS という並びができないような順列は, 右下図の 5 箇所のうち, 1 箇所に 2 個 S が入るか, 2 箇所に 1 個ずつ S が入るかのいずれかより  $5 + {}_5C_2 = 15$  通り

よって  $7560 \times 15 = 113400$  通り

$$\begin{array}{cccccccc} T & \circ & T & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \end{array}$$

したがって, ST, TS という並びの少なくとも一方を含む順列は,

$$453600 - (52920 + 113400) = 287280 \text{ 通り}$$