解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2022年度　日本大学（N方式Ⅱ期）

【講　評】

例年のN方式同様，大問6題で出題された．［Ⅰ］が小問集合で，［Ⅱ］～［Ⅵ］が大問という形式にも変化はなかった．すべての問題が典型問題であり，解法に困るようなことはない．また，計算が煩雑な問題もなかったため，時間的な厳しさもなかった．Ⅰ期と比較して，やや難易度が下がっていることと，Ⅱ期の募集定員等を考慮すると，8割以上の得点が目標となるだろう．

【解　答】

［Ⅰ］小問集合【易】

(1) $\boxed{1}$：1, $\boxed{2}$：1, $\boxed{3}$：7, $\boxed{4}$：6

(2) $\boxed{5}$：4,

(3) $\boxed{6}$：−, $\boxed{7}$：1, $\boxed{8}$：4, $\boxed{9}$：2, $\boxed{10}$：5,

(4) $\boxed{11}$：6, $\boxed{12}$：1, $\boxed{13}$：9,

(5) $\boxed{14}$：6, $\boxed{15}$：6, $\boxed{16}$：9,

［Ⅱ］指数関数（数Ⅱ）【やや易】

$\boxed{17}$：1, $\boxed{18}$：0, $\boxed{19}$：5, $\boxed{20}$：5, $\boxed{21}$：4, $\boxed{22}$：−, $\boxed{23}$：3, $\boxed{24}$：4, $\boxed{25}$：0,

［Ⅲ］ベクトル（数B）【やや易】

$\boxed{26}$：1, $\boxed{27}$：3, $\boxed{28}$：2, $\boxed{29}$：3, $\boxed{30}$：−, $\boxed{31}$：1, $\boxed{32}$：7, $\boxed{33}$：−,
$\boxed{34}$：2, $\boxed{35}$：7,

［Ⅳ］数列（数学B）【やや易】

$\boxed{36}$：2, $\boxed{37}$：2, $\boxed{38}$：5, $\boxed{39}$：0, $\boxed{40}$：6, $\boxed{41}$：5, $\boxed{42}$：1,

［Ⅴ］微分法・積分法（数学Ⅲ）【やや易】

$\boxed{43}$：1, $\boxed{44}$：0, $\boxed{45}$：1, $\boxed{46}$：2, $\boxed{47}$：4, $\boxed{48}$：2, $\boxed{49}$：2, $\boxed{50}$：2,

［Ⅵ］関数の極限（数学Ⅲ）【標準】

$\boxed{51}$：2, $\boxed{52}$：2, $\boxed{53}$：2, $\boxed{54}$：2, $\boxed{55}$：2, $\boxed{56}$：1, $\boxed{57}$：2, $\boxed{58}$：8

【 問 題 】

Ⅰ

(1) $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta=\dfrac{\boxed{1}+\sqrt{\boxed{2}\boxed{3}}}{\boxed{4}}$

である．

(2) x の 2 次不等式 $mx^2+4x+m-3>0$ の解がすべての実数であるとき，定数 m のとり得る値の範囲は $m>\boxed{5}$ である．

(3) i を虚数単位とする．$x=\dfrac{1-2i}{1+2i}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}}{\boxed{9}\boxed{10}}$ である．

(4) 1 つのさいころを 3 回続けて投げる．3 回の出た目の最大値が 3 であったという条件のもとで，3 回の出た目がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}\boxed{13}}$ である．

(5) 中心が直線 $y=2x-3$ 上にあり，x 軸と y 軸の両方に接する円のうち，半径が最大の円の方程式は $x^2+y^2-\boxed{14}\,x-\boxed{15}\,y+\boxed{16}=0$ である．

Ⅱ

$f(x)=2^{2x-1}-5\cdot 2^{x-2}$ とする．

(1) $f(\log_4 5)=\dfrac{\boxed{17}\boxed{18}-\boxed{19}\sqrt{\boxed{20}}}{\boxed{21}}$ である．

(2) x の方程式 $f(x)=k$ が正の解と負の解をもつとき，定数 k のとり得る値の範囲は

$\dfrac{\boxed{22}\boxed{23}}{\boxed{24}}<k<\boxed{25}$ である．

Ⅲ

$\triangle ABC$ において，$AB=3$，$AC=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$ とする．

(1) A から直線 BC に下ろした垂線を AD とすると，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}\overrightarrow{AC}$

である．

(2) $\triangle ABC$ の垂心を H とすると，$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\boxed{30}\boxed{31}}{\boxed{32}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{33}\boxed{34}}{\boxed{35}}\overrightarrow{AC}$

である．

Ⅳ

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=2$，　$a_2=6$，　$a_3=12$ を満たし，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は等差数列であるとする．

(1)　数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{36}\,n+\boxed{37}$ である．

(2)　$a_{22}=\boxed{38}\boxed{39}\boxed{40}$ である．

(3)　数列 $\{c_n\}$ を

$$c_1=b,\quad c_{n+1}=c_n+\frac{1}{a_n}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=\dfrac{\boxed{41}\,n-\boxed{42}}{n}$ である．

Ⅴ

$x>0$ で定義された関数 $f(x)=(\log x)^2$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$\log$ は自然対数，　e は自然対数の底とする．

(1)　$f(x)$ は $x=\boxed{43}$ のとき極小値 $\boxed{44}$ をとる．また，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の y 座標は $\boxed{45}$ である．

(2)　原点 $(0,\ 0)$ から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線のうち傾きが正のものを l とする．l と $y=f(x)$ の接点の座標は $\left(e^{\boxed{46}},\ \boxed{47}\right)$ である．

(3)　直線 $x=e^{\boxed{46}}$ と $y=f(x)$ および x 軸で囲まれた部分の面積は

$\boxed{48}\,e^{\boxed{49}}-\boxed{50}$ である．

Ⅵ

中心が O で半径が 1 の円に，　AB＝AC の二等辺三角形 ABC が内接している．
$\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を $S(\theta)$ とする．

(1)　$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi-\theta}{\boxed{51}}$，　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\boxed{52}\sin\dfrac{\theta}{\boxed{53}}$ である．

(2)　$S(\theta)=\boxed{54}\sin\theta\sin^{\boxed{55}}\dfrac{\theta}{\boxed{53}}$ であり，　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{\boxed{56}}{\boxed{57}}$，

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{S\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\boxed{58}$ である．

【 解　説 】

［Ⅰ］

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より　　$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}\qquad\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$$

解と係数の関係により，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は t の 2次方程式

$$t^2-\frac{1}{3}t-\frac{4}{9}=0\qquad\therefore\quad 9t^2-3t-4=0$$

の 2 解である．

これを解くと　　$t=\dfrac{3\pm\sqrt{9+4\cdot9\cdot4}}{18}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{6}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\sin\theta\geqq0$ であるから　　$\sin\theta=\dfrac{\mathbf{1+\sqrt{17}}}{\mathbf{6}}$

$\boxed{\text{別解}}$　$\sin\theta$ の方程式を導いてもよい．

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より　　$\cos\theta=\dfrac{1}{3}-\sin\theta$

両辺を 2 乗すると　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{3}\sin\theta+\sin^2\theta$

$$1-\sin^2\theta=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\sin\theta+\sin^2\theta$$

$$9\sin^2\theta-3\sin\theta-4=0$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{3\pm\sqrt{9+9\cdot16}}{18}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\sin\theta\geqq0$ であるから　　$\sin\theta=\dfrac{\mathbf{1+\sqrt{17}}}{\mathbf{6}}$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(2)　$m\fallingdotseq0$ より，$mx^2+4x+m-3=0$ の判別式を D とすると，不等式の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$$m>0\quad\text{かつ}\quad D<0$$

$\dfrac{D}{4}=4-m(m-3)=-(m-4)(m+1)$ であるから，$D<0$ のとき

$$(m-4)(m+1)>0\qquad\therefore\quad m<-1,\ \ 4<m$$

$m>0$ であるから　　$\boldsymbol{m>4}$

(3)　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-2i}{1+2i}+\dfrac{1+2i}{1-2i}=\dfrac{(1-2i)^2+(1+2i)^2}{1+2^2}=\dfrac{-3-4i-3+4i}{5}=-\dfrac{6}{5}$

よって　　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(-\dfrac{6}{5}\right)^2-2=-\dfrac{\mathbf{14}}{\mathbf{25}}$

$\boxed{\text{別解}}$　複素数平面（数Ⅲ）の知識を用いてもよい．

$|x|=\left|\dfrac{1-2i}{1+2i}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ であるから　$|x|^2=x\overline{x}=1$　$\therefore$　$\dfrac{1}{x}=\overline{x}$

ここで　$x=\dfrac{1-2i}{1+2i}=\dfrac{(1-2i)^2}{5}=\dfrac{-3-4i}{5}$

よって　$x+\dfrac{1}{x}=x+\overline{x}=2\mathrm{Re}(x)=-\dfrac{6}{5}$

したがって　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(-\dfrac{6}{5}\right)^2-2=-\dfrac{14}{25}$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(4)　3 回の出た目の最大値が 3 である確率は，3 回とも 3 以下の目が出る確率から，3 回とも 2 以下の目が出る確率を引いたものであるから

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{27-8}{6^3}=\frac{19}{6^3}$$

また，3 回の出た目の最大値が 3 で，3 回の出た目がすべて異なるのは，1，2，3 の目が 1 回ずつ出るときであるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 3!=\frac{6}{6^3}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{\dfrac{6}{6^3}}{\dfrac{19}{6^3}}=\dfrac{6}{19}$

(5)　x 軸と y 軸の両方に接する円の中心は，x 軸と y 軸のなす角の二等分線 $y=\pm x$ 上に存在する．

中心が $y=x$ 上にあるとき，$y=2x-3$ と連立させて

$x=2x-3$　$\therefore$　$x=3$

よって，円の中心は $(3,\ 3)$ であり，x 軸と y 軸に接することから半径は 3 である．

中心が $y=-x$ 上にあるとき，$y=2x-3$ と連立させて

$-x=2x-3$　$\therefore$　$x=1$

よって，円の中心は $(1,\ -1)$ であり，x 軸と y 軸に接することから半径は 1 である．

したがって，半径が最大の円の方程式は

$(x-3)^2+(y-3)^2=9$

$\therefore$　$x^2+y^2-6x-6y+9=0$

［Ⅱ］

(1)　$\log_4 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 5$

よって　　$f(\log_4 5)=2^{\log_2 5-1}-5\cdot 2^{\frac{1}{2}\log_2 5-2}$

$$=2^{\log_2 \frac{5}{2}}-5\cdot 2^{\log_2 \frac{\sqrt{5}}{4}}$$

$$=\frac{5}{2}-5\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\mathbf{10-5\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}$$

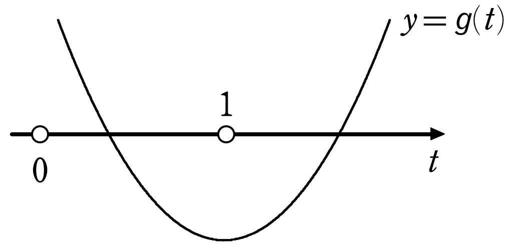
(2)　$2^x=t$ とおくと　　$f(x)=\dfrac{1}{2}(2^x)^2-\dfrac{5}{4}\cdot 2^x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{5}{4}t$

$f(x)=k$ より　　$\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{5}{4}t=k$　　　$\therefore$　$2t^2-5t-4k=0$　……①

また，$x>0$ のとき $t>1$，$x<0$ のとき $0<t<1$ であるから，方程式 $f(x)=k$ が正の解と負の解をもつのは，t の方程式 ① が，$t>1$ と $0<t<1$ の範囲に，1 つずつ解を持つときであるから，

$$\begin{cases} f(0)=-4k>0 \\ f(1)=-3-4k<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k<0 \\ k>-\dfrac{3}{4} \end{cases}$$



よって　　$\dfrac{\mathbf{-3}}{\mathbf{4}}<k<0$

$\boxed{\text{別解}}$　k の範囲は，定数分離によって求めてもよい．

$2^x=t$ とおくと　　$f(x)=\dfrac{1}{2}(2^x)^2-\dfrac{5}{4}\cdot 2^x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{5}{4}t$

$f(x)=k$ より　　$\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{5}{4}t=k$　……②

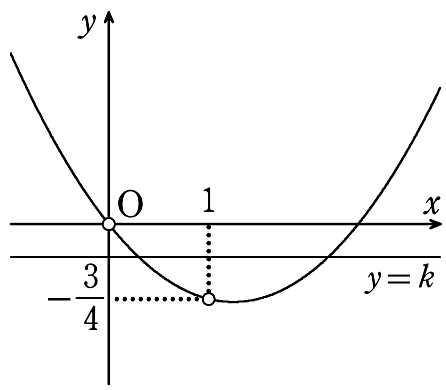
また，$x>0$ のとき $t>1$，$x<0$ のとき $0<t<1$ であるから，方程式 $f(x)=k$ が正の解と負の解をもつのは，t の方程式 ② が，$t>1$ と $0<t<1$ の範囲に，1 つずつ解を持つときである．

$$k=\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{4}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(t-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{32}$$

よって，② の左辺のグラフは右の図のようになるから，このグラフと直線 $y=k$ が $t>1$ と $0<t<1$ の範囲で共有点を持つときを考えて

$$\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{4}}<k<0$$

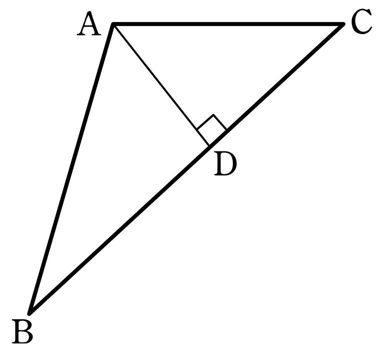


$\boxed{\text{別解}}$終わり

［Ⅲ］

(1)　D は直線 BC 上にあるから，実数 t を用いて次のように表すことができる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots①$$



$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

よって　　$\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$

$$(t-1)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+(1-2t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$$

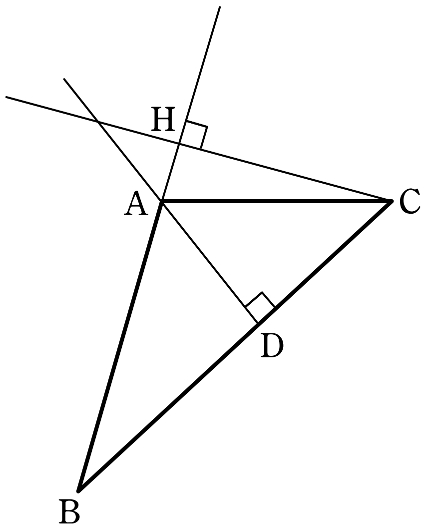
$$(t-1)\cdot 3^2+(1-2t)\cdot(-1)+t\cdot 4=0$$

$$15t-10=0\qquad\therefore\quad t=\frac{2}{3}$$

これを ① に代入すると　　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　H は直線 AD 上にあるから，実数 k を用いて次のように表すことができる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots②$$



よって　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{2}{3}k-1\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって　　$\left\{\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{2}{3}k-1\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$$\frac{k}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\left(\frac{2}{3}k-1\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\frac{k}{3}\cdot 3^2+\left(\frac{2}{3}k-1\right)\cdot(-1)=0$$

$$\frac{7}{3}k+1=0\qquad\therefore\quad k=-\frac{3}{7}$$

これを ② に代入すると　　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{-1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{-2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

［Ⅳ］

(1)　$b_1=a_2-a_1=6-2=4$，　$b_2=a_3-a_2=12-6=6$

階差数列 $\{b_n\}$ は等差数列であり，公差は $b_2-b_1=6-4=2$ であるから，

$$b_n=4+2(n-1)=\mathbf{2n+2}$$

(2)　数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)\\&=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)\\&=n^2+n=n(n+1)\end{aligned}$$

$a_1=2$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ.

よって　　$a_{22}=22\cdot 23=\mathbf{506}$

(2)　$c_{n+1}=c_n+\dfrac{1}{a_n}$ であるから，数列 $\{c_n\}$ の階差数列は，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ である.

よって $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}c_n&=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k}=4+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\\&=4+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=4+1-\frac{1}{n}=\frac{5n-1}{n}\end{aligned}$$

$c_1=4$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ.

よって　　$c_n=\mathbf{\dfrac{5n-1}{n}}$

［V］

(1)　$f(x)=(\log x)^2$ より

$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot 2\log x=\frac{2\log x}{x}$$

$$f''(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{2(1-\log x)}{x^2}$$

よって，$f(x)$ の増減，凹凸は，次のようになる．

x	0		1		e	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↘		↗		↗

$f(1)=0$ であるから，$f(x)$ は $x=1$ のとき，極小値 **0** をとる．

また，$f(e)=1$ であるから，変曲点の y 座標は **1** である．

(2)　$(t,\ (\log t)^2)$ における接線の方程式は　$y-(\log t)^2=\dfrac{2\log t}{t}(x-t)$

$(0,\ 0)$ を通るとき　$-(\log t)^2=\dfrac{2\log t}{t}\cdot(-t)$

$(\log t)^2-2\log t=0$

$\log t(\log t-2)=0$

$\log t=0,\ 2$　　$\therefore$　$t=1,\ e^2$

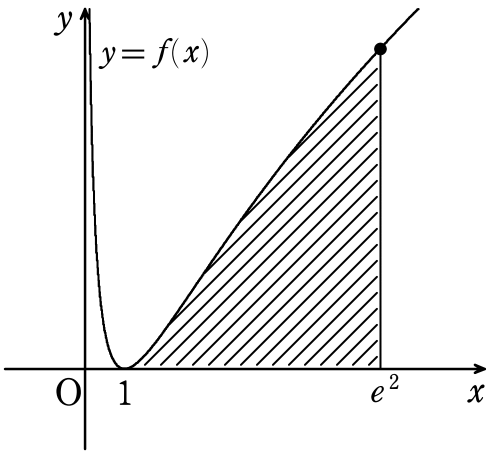
$f'(1)=0,\ \ f'(e^2)=\dfrac{4}{e^2}>0$ であり，

$f(e^2)=2^2=4$

であるから，l と $y=f(x)$ の接点の座標は　$\boldsymbol{(e^2,\ 4)}$

(3)　(1) の増減表と，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ より，

$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．



求める面積は，図の斜線部分であるから

$$\int_1^{e^2}(\log x)^2\,dx$$

$$=\Big[x(\log x)^2\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{2\log x}{x}\,dx$$

$$=4e^2-2\int_1^{e^2}\log x\,dx$$

$$=4e^2-2\Big[x\log x-x\Big]_1^{e^2}$$

$$=4e^2-2(e^2+1)=\boldsymbol{2e^2-2}$$

［Ⅵ］

(1)　OA＝OB＝1 より，△OAB は二等辺三角形であるから

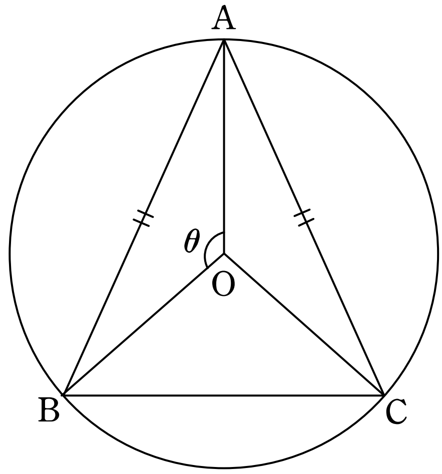
$$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OBA}=\frac{\pi-\theta}{2}$$

また，円周角と中心角の関係により

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\frac{\theta}{2}$$

であるから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cdot 1 \qquad \therefore\quad \mathrm{AB}=2\sin\frac{\theta}{2}$$



(2)　△OAB≡△OAC であるから　　$\angle\mathrm{BAC}=2\angle\mathrm{OAB}=\pi-\theta$

よって　　$S(\theta)=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin(\pi-\theta)$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\sin\theta=2\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$$

したがって　　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}$

また　　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{S\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^3}{S\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot 2^3\cdot\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{1}{2}\cdot 2^3\cdot\frac{2}{1}=8$

$\boxed{\text{別解}}$　最後の極限は，前の結果を用いずに，直接計算してもよい．

$S(\theta)=2\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$　より

$$\frac{S(\theta)}{S\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{2\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{4}}=\frac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{4}}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{S\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\frac{\theta}{4}}{\sin\frac{\theta}{4}}\right)^2\cdot 4^2=8$

$\boxed{\text{補足}}$終わり