解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2022年度　昭和大学　Ⅱ期

【　講　評　】

例年通り大問4題で出題された．Ⅰ期同様，全体の難易度はやや下がり，解きやすい問題が並んだ．1次試験を突破するためには，全体で7割の得点を確保したい．

$\boxed{1}$ ベクトル（数学B）【標準】

空間座標内の四面体に関する典型問題であった．外積や平面の方程式を用いれば容易に解くことができる．また，ベクトル方程式を用いても，それほど計算が面倒なわけでもないので，確実に解きたい問題である．

$\boxed{2}$ 小問集合（対数関数（数学Ⅱ）／整数の性質（数学A）／対数関数（数学Ⅱ））【標準】

(1)(3)は対数に関する典型問題で，計算量も少ないため，確実に得点したい．(2)は n 進法に関する問題で，類題を解いた経験がないと対応しづらい問題である．ここで差がつくだろう．

$\boxed{3}$ 積分法（数学Ⅲ）【やや易】

(1)は定積分計算，(2)は(1)の結果を用いて x 軸，y 軸回転体の体積を求める問題であった．図が単純で，計算量も少ないため，この問題は確実に得点すべきである．

$\boxed{4}$ 確率（数学A）【標準】

2問とも反復試行の確率を求める典型問題であった．事象も単純で解きやすい問題であるが，やや計算が面倒であるため，計算ミスに注意が必要である．

【　解　答　】

$\boxed{1}$ (1)　$\mathrm{H}\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$，　(2)　$V=2$，　(3)　$\mathrm{AH}:\mathrm{HP}=1:2$，　(4)　$\mathrm{P}(2,\ 1,\ 1)$

$\boxed{2}$ (1)　$c=\dfrac{1+ab}{1+a}$，　(2)　(a)　232312　(b)　69

(3)　(a)　11桁　(b)　$a=4$　(c)　余り4

$\boxed{3}$ (1)　$I_1=1$，　$I_2=\dfrac{\pi}{2}-1$，　$I_3=\dfrac{\pi^2}{4}-2$

(2)　$V_1=\dfrac{\pi^2}{4}$，　$V_2=\dfrac{\pi^4}{4}-2\pi$

$\boxed{4}$ (1)　(1−1)　$\dfrac{125}{1944}$　(1−2)　$\dfrac{175}{7776}$

(2)　(2−1)　$(1-p)^3(1+3p)$，$(1-p)^5(15p^2+5p+1)$　(2−2)　$\dfrac{25-\sqrt{265}}{30}<p<1$

お問い合わせは☎0120-302-872

https://keishu-kai.jp/

【 問 題 】

$\boxed{1}$

座標空間において，O(0, 0, 0)，A(1, −1, −1)，B(2, 0, 2)，C(2, 2, 0) を頂点とする四面体がある．点 O から△ABC が作る平面に向かって垂線 OH を下ろす．線分 AH の延長と線分 BC の交点を P とする．次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) 点 H の座標を求めよ．

(2) 四面体の体積 V を求めよ．

(3) 線分 AH と線分 HP の長さの比 AH : HP を求めよ．

(4) 点 P の座標を求めよ．

$\boxed{2}$

(1) 関係式 $2^a=3$，$3^b=5$，$6^c=10$ が与えられたとき，c を a，b を用いて表せ．

(2) 4 種類の数字 0，1，2，3 を用いて表現された自然数を，次のように小さい方から順に並べる．

2，10，12，20，22，30，32，100，102，110，112，120，122，130，132，200，…

次の問いに答えよ．

(a) 第 1489 項目の数値はいくつか．　(b) 2022 が現れるのは第何項目か．

(3) $n=14^{100}$ とし，n の最高位の数字を a とする．次の各問いに答えよ．なお，必要に応じて下記対数表を用いること．

(a) n の桁数を求めよ．　(b) a の値を求めよ．

(c) $a\times n$ を 15 で割った余りを求めよ．

$\log_{10}2=0.3010$　$\log_{10}3=0.4771$　$\log_{10}4=0.6021$　$\log_{10}5=0.6990$

$\log_{10}6=0.7782$　$\log_{10}7=0.8451$　$\log_{10}8=0.9031$　$\log_{10}9=0.9542$

$\boxed{3}$

(1)　次の各定積分の値を求めよ．

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\ dx$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ dx$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\ dx$$

(2)　不等式 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\sin x \leqq y \leqq 1$ を満たす $(x,\ y)$ の存在する範囲を x 軸のまわりに回転してえられる立体の体積を V_1，y 軸のまわりに回転してえられる立体の体積を V_2 とする．V_1，V_2 をそれぞれ求めよ．

$\boxed{4}$

(1)　1 個のサイコロを繰り返し振る試行について，次の問いに答えよ．
サイコロは，1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする．

(1−1)　1 の目が 2 回出れば試行を終えることにする．ちょうど 5 回振って試行を終える確率を求めよ．

(1−2)　1 の目が連続して 2 回出れば試行を終えることにする．ちょうど 5 回振って試行を終える確率を求めよ．

(2)　ある工場では，作られる製品のうち $p\,(0<p<1)$ の確率で不良品が発生するという．
ある程度たくさんの製品が生産された時点で検査を行い，それに合格すれば一斉に出荷する．検査方法として，

A：4 個抜き出して検査し，不良品が 1 個以下なら合格

B：7 個抜き出して検査し，不良品が 2 個以下なら合格

という 2 つの方法を考えた．

(2−1)　A，B それぞれにつき，検査で合格する確率を求めよ．

(2−2)　A のほうが合格しやすいのは p の値がどのような範囲のときか．

【　解　説　】

$\boxed{1}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 3,\ 1)$

$\vec{n}=(-4,\ 1,\ 1)$ とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0$

$\vec{n}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{n}$

よって，$\vec{n}$ は △ABC が作る平面の法線ベクトルであるから，この平面の方程式は

$$-4(x-1)+1\cdot(y+1)+1\cdot(z+1)=0$$

$$\therefore\quad -4x+y+z+6=0\quad\cdots\cdots①$$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}/\!/\vec{n}$ であるから，ある実数 k により　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{n}=(-4k,\ k,\ k)$

H は ① 上の点であるから　　$16k+k+k+6=0$　　$\therefore\quad k=-\frac{1}{3}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ であるから，点 H の座標は　　$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=1+9+1=11$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=1+9+1=11$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1+3+3=7$

よって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{11^2-7^2}=3\sqrt{2}$$

また　　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{3}\sqrt{16+1+1}=\sqrt{2}$

したがって，四面体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{3}\cdot3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)-(1,\ -1,\ -1)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

点 H は △ABC が作る平面上にあるから，ある実数 x，y が存在して

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}=x(1,\ 1,\ 3)+y(1,\ 3,\ 1)=(x+y,\ x+3y,\ 3x+y)$$

よって　　$x+y=\frac{1}{3}$，$x+3y=\frac{2}{3}$，$3x+y=\frac{2}{3}$

これを解くと　　$x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{6}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\cdot\frac{1}{3}$

点 P は線分 AH の延長と線分 BC の交点であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから　　AH：HP＝1：2

(4)　(3) より　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\frac{1}{2}\{(1,\ 1,\ 3)+(1,\ 3,\ 1)\}=(1,\ 2,\ 2)$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1,\ -1,\ -1)+(1,\ 2,\ 2)=(2,\ 1,\ 1)$

したがって，点 P の座標は　　$(2,\ 1,\ 1)$

$\boxed{別解1}$　(1)(3)(4)は，平面や直線のベクトル方程式を用いてもよい．

(1)　点 H は △ABC が作る平面上にあるから，ある実数 x，y，z が存在して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x(1,\ -1,\ -1)+y(2,\ 0,\ 2)+z(2,\ 2,\ 0)$$
$$=(x+2y+2z,\ -x+2z,\ -x+2y)$$

と表せる．ただし，$x+y+z=1$　……①　である．

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x+2y+2z,\ -x+2z,\ -x+2y)\cdot(1,\ 1,\ 3)=0$

$\therefore\ -3x+8y+4z=0$　……②

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x+2y+2z,\ -x+2z,\ -x+2y)\cdot(1,\ 3,\ 1)=0$

$\therefore\ -3x+4y+8z=0$　……③

①×3＋② より　$11y+7z=3$　……④

①×3＋③ より　$7y+11z=3$　……⑤

④，⑤ が成り立つとき $y=z$ であるから，④ より　$18y=3$　$\therefore\ y=z=\dfrac{1}{6}$

① に代入すると　$x+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=1$　$\therefore\ x=\dfrac{2}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)-(1,\ -1,\ -1)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

点 P は直線 AH 上の点であるから，ある実数 p が存在して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\overrightarrow{\mathrm{AH}}=p\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)=\left(\frac{p}{3},\ \frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$$

また，点 P は線分 BC 上にあるから，$0\leqq t\leqq 1$ なる実数 t が存在して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-t)(1,\ 1,\ 3)+t(1,\ 3,\ 1)$$
$$=(1,\ 1+2t,\ 3-2t)$$

よって　$\dfrac{p}{3}=1$ かつ $\dfrac{2}{3}p=1+2t$ かつ $\dfrac{2}{3}p=3-2t$

これを満たすのは　$p=3$，$t=\dfrac{1}{2}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より　**AH : HP = 1 : 2**

(4)　(3) より，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1,\ 2,\ 2)$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1,\ -1,\ -1)+(1,\ 2,\ 2)=(2,\ 1,\ 1)$$

よって，点 P の座標は　**(2, 1, 1)**

$\boxed{別解1}$終わり

$\boxed{別解2}$　(2)の体積は外積を用いると容易に求めることができる．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-2,\ -4,\ 2)$ であるから

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\frac{1}{6}\left|(-2,\ -4,\ 2)\cdot(2,\ 2,\ 0)\right|=\frac{1}{6}|-12|=\mathbf{2}$$

$\boxed{別解2}$終わり

$\boxed{2}$

(1)　$2^a=3$，$3^b=5$，$6^c=10$ より　　$a=\log_2 3$，$b=\log_3 5$，$c=\log_6 10$

よって

$$c=\log_6 10=\frac{\log_2 10}{\log_2 6}=\frac{1+\log_2 5}{1+\log_2 3}=\frac{1+\dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}}{1+a}=\frac{1+\log_2 3\log_3 5}{1+a}$$

$$=\frac{\mathbf{1+ab}}{\mathbf{1+a}}$$

(2)　各項を 4 進法で表された数であるとみなし，その数を 10 進法に直すと

2，$10_{(4)}=4$，$12_{(4)}=6$，$20_{(4)}=8$，$22_{(4)}=10$，$30_{(4)}=12$，$32_{(4)}=14$，……

であるから，与えられた数列は，正の偶数を小さい順に並べ，4 進法で表した数列であることがわかる.

(a)　第 1489 項目は，10 進法で 1489 番目の正の偶数であるから

$$2\times 1489=2998$$
$$=2\cdot 4^5+3\cdot 4^4+2\cdot 4^3+3\cdot 4^2+1\cdot 4^1+2\cdot 4^0$$
$$=232312_{(4)}$$

よって，第 1489 項目は　　**232312**

(b)　2022 を 10 進法に直すと

$$2022_{(4)}=2\cdot 4^3+2\cdot 4^1+2\cdot 4^0=128+8+2=138=2\times 69$$

よって，69 番目の正の偶数であるから，第 **69** 項である.

(3)(a)　$\log_{10} n=100\log_{10}(2\cdot 7)=100(\log_{10} 2+\log_{19} 7)$

$$=100(0.3010+0.8451)=114.61$$

よって $10^4\leqq n<10^{15}$ が成り立つから，n の桁数は **11** である.

(b)　$n=10^{114.\ 61}=10^{114}\times 10^{0.61}$

ここで $\log_{10} 4=0.6021$，$\log_{10} 5=0.6990$ より

$$\log_{10} 4<0.61<\log_{10} 5 \qquad \therefore\quad 4<10^{0.61}<5$$

よって，n の最高位の数は 4 であるから　　$\mathbf{a=4}$

(c)　整数 p，q，r について，$p-q$ が r の倍数であることを $p\equiv q\ (\mathrm{mod}\ r)$ と表す.

このとき $14\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 15)$ であるから

$$a\times n=4\times 14^{100}\equiv 4\times(-1)^{100}\equiv 4$$

よって，$a\times n$ を 15 で割った余りは **4** である.

$\boxed{3}$

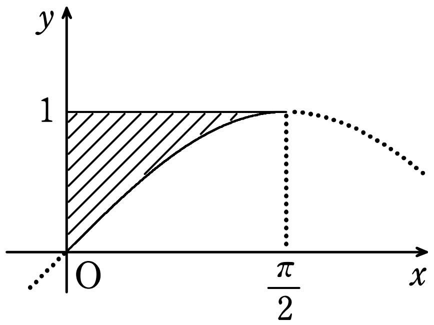
(1) $I_1=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}$

$I_2=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-1}$

$I_3=\Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

$=\frac{\pi^2}{4}-2I_1=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}-2}$

(2) 右図の斜線部分を x 軸のまわりに回転してえられる立体の体積が V_1， y 軸のまわりに回転してえられる立体の体積が V_2 である.



V_1 について， $y=1$ を回転させてえられる円柱の体積から， $y=\sin x$ を回転させてえられる立体の体積を引くと考えて

$$V_1=\pi\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(\sin x)^2\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2x)\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$$

また　　$V_2=\int_0^1\pi x^2\,dy$

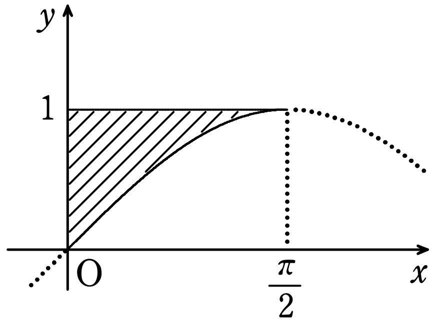
ここで $y=\sin x$ より　　$dy=\cos x\,dx$，

y	$0\longrightarrow1$
x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

よって　　$V_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi x^2\cos x\,dx=\pi I_3=\boldsymbol{\frac{\pi^3}{4}-2\pi}$

$\boxed{\text{別解}}$　V_2 はバームクーヘン分割で求めてもよい.

$x=\frac{\pi}{2}$ を y 軸のまわりに回転させてえられる円柱の体積から， $y=\sin x$ を y 軸のまわりに回転させてえられる立体の体積を引くと考えて



$$V_2=\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi x\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi^3}{4}-2\pi I_1=\boldsymbol{\frac{\pi^3}{4}-2\pi}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

$\boxed{4}$

(1)(1−1)　4 回目までに 1 の目が 1 回，1 以外の目が 3 回出て，5 回目に 1 の目が出るときであるから，その確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{6}=\frac{4\cdot 5^3}{6^5}=\frac{125}{1944} $$

(1−2)　1 の目が出ることを ○，1 以外の目が出ることを × と表すと，5 回振って試行を終えるのは

○×××○○，×○×○○，×××○○

となるときであるから，その確率は

$$ \left\{2\times\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}\times\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{35\times 5}{6^5}=\frac{175}{7776} $$

(2)(2−1)　検査 A，B で合格する確率をそれぞれ $P(A)$，$P(B)$ とおく．
検査 A で合格するのは，抜き出した 4 個の製品のうち，不良品が 0 個または 1 個のときであるから，

$$ P(A)=(1-p)^4+{}_4\mathrm{C}_1p(1-p)^3=(1-p)^3(1+3p) $$

検査 B で合格するのは，抜き出した 7 個の製品のうち，不良品が 0 個または 1 個または 2 個のときであるから，

$$ \begin{aligned} P(B)&=(1-p)^7+{}_7\mathrm{C}_1p(1-p)^6+{}_7\mathrm{C}_2p^2(1-p)^5\\ &=(1-p)^5\{(1-p)^2+7p(1-p)+21p^2\}\\ &=(1-p)^5(15p^2+5p+1) \end{aligned} $$

(2−2)　検査 A の方が合格しやすいのは $P(A)>P(B)$ となるときであるから，

$$ (1-p)^3(1+3p)>(1-p)^5(15p^2+5p+1) $$

$0<p<1$ より $1-p>0$ であるから

$$ 1+3p>(1-p)^2(15p^2+5p+1) $$

$$ 15p^4-35p^2+6p^2<0 $$

$p^2>0$ であるから $15p^2-25p+6<0$ と同値である．

$15p^2-25p+6=0$ のとき　$p=\dfrac{25\pm\sqrt{25^2-4\cdot15\cdot6}}{30}=\dfrac{25\pm\sqrt{265}}{30}$

よって，$0<p<1$ であるから　$\dfrac{25-\sqrt{265}}{30}<p<1$