2022 年度　杏林大学

【講　評】

昨年同様，大問３題で出題された．問題Ⅰは三角関数の最大値，最小値に関する問題であり，置き換えの誘導もあるため，解きやすい問題である．最後の極値をとる θ の個数は，微分変数を x と勘違いしてミスしてしまった人が多いのではないだろうか．気を付けておきたい点である．問題Ⅱは標準レベルの微分法・積分法（数Ⅲ）の問題である．絶対値関数の定積分など，計算の出際良さがポイントとなる．この問題が確実に得点できたかどうかが，合否に大きく影響するだろう．問題Ⅲは杏林大学らしい空間図形・座標の問題であり，図形的な考察や数式（ベクトル）による解析が必要な，やや難しめの問題である．点差はつきづらい問題であると予想できる．問題Ⅰ，問題Ⅱをしっかりと得点し，問題Ⅲで部分点を少し稼ぎ，全体で７割程度の得点ができていればよいだろう．

【解　答】

Ⅰ．三角関数（数学Ⅱ）／微分法（数学Ⅱ，数学Ⅲ）【やや易】

(1)　ア：－，　イ：2,　ウ：1,　エ：－，　オ：4,　カ：3

(2)　キ：1,　ク：2,　ケ：－，　コ：2,　サ：5,　シ：2,　ス：4,
　　セ：－，　ソ：1,　タ：2,　チ：3,　ツ：1,　テ：4,　ト：8,　ナ：4

Ⅱ．微分法（数Ⅲ）／積分法（数Ⅲ）【標準】

(1)　ア：3,　イ：1,　ウ：9,　エ：9,　オ：6,　カ：2,　キ：2,　ク：7,
　　ケ：3,　コ：8,　サ：－，　シ：1,　ス：1,　セ：6

(2)　ソ：－，　タ：9,　チ：3,　ツ：⓪，　テ：3,　ト：5,　ナ：4,　ニ：5

Ⅲ．図形と方程式（数Ⅱ）／ベクトル（数B）【やや難】

(1)(a)　ア：1,　(b)　イ：⓪，　ウ：⓪，　(c)　エ：③，　オ：③
　(d)　カ：5,　キ：1,　ク：2,　ケ：3,　コ：2

(2)(a)　サ：②，　(b)　シ：⑥，　ス：⑥，　(c)　セ：0,　ソ：1,　タ：2,　チ：5,
　　ツ：3,　テ：1,　ト：3,　ナ：8,　ニ：2,　ヌ：7

【　解　説　】

［Ⅰ］

(1)　2 倍角，3 倍角の公式により

$$\cos 2\theta = -2\sin^2\theta + 1,\qquad \sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$$

(2)　(1) を用いると

$$y = -\frac{1}{12}(-4\sin^3\theta + \sin\theta) + \frac{3}{8}(-2\sin^2\theta + 1) - \frac{3}{4}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3\theta - \frac{3}{4}\sin^2\theta - \sin\theta + \frac{3}{8}$$

$x = \sin\theta$ とおくと　$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x + \frac{3}{8}$

また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$　$\therefore$　$-1 \leqq x \leqq 1$

このとき　$\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2}(2x+1)(x-2)$

よって，y の x に関する増減は次のようになる．

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$\frac{dy}{dx}$		$+$		$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

$x = 1$ のとき　$y = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} - 1 + \frac{3}{8} = -\frac{25}{24}$，　$x = -1$ のとき　$y = -\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{8} = \frac{7}{24}$

$-\frac{25}{24} < \frac{7}{24}$ であるから，y は $x = 1$ のとき最小値をとる．

$x = \sin\theta = 1$ のとき，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\theta = \frac{\pi}{2}$

よって，y は $\theta = \frac{1}{2}\pi$ で最小値 $\mathbf{\frac{-25}{24}}$ をとる．

また，$x = -\frac{1}{2}$ のとき　$y = -\frac{1}{24} - \frac{3}{16} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{31}{48}$

したがって，y は $\sin\theta = \mathbf{\frac{-1}{2}}$ のとき，最大値 $\mathbf{\frac{31}{48}}$ をとる．

さらに，$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ より　$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2}(2x+1)(x-2)\cos\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = 0$ のとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ より　$x = -\frac{1}{2}$，$\cos\theta = 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

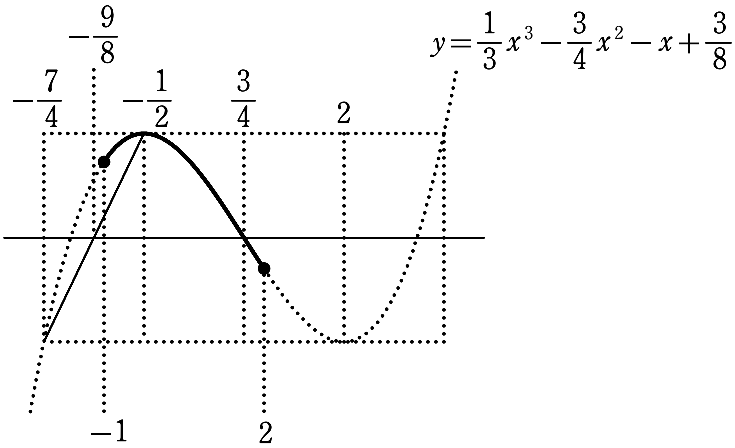
$x = \sin\theta = -\frac{1}{2}$ より　$\theta = \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$

$\cos\theta = 0$ より　$\theta = \frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

$\frac{dy}{d\theta}$ はこれら 4 つの θ の前後で符号変化するから，y の極値を与える θ の個数は **4** である．

$\boxed{\text{参考}}$

3 次関数の対称性を用いると，$x=-1$ における y の値よりも $x=1$ における y の値の方が小さいことを，計算せずに判断することができる．



（図中の数値は，いずれも x の値である）

$\boxed{\text{参考}}$終わり

［Ⅱ］

(1) $\displaystyle\int xe^{-3x}\,dx=-\frac{1}{3}xe^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx$

$\displaystyle =-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C=-\left(\frac{3x+1}{9}\right)e^{-3x}+C$ （C は積分定数）

$\displaystyle\int x^2e^{-3x}\,dx=-\frac{1}{3}x^2e^{-3x}+\frac{2}{3}\int xe^{-3x}\,dx$

$\displaystyle =-\frac{1}{3}x^2e^{-3x}+\frac{2}{3}\left\{-\left(\frac{3x+1}{9}\right)e^{-3x}\right\}+C$

$\displaystyle =-\left(\frac{9x^2+6x+2}{27}\right)e^{-3x}+C$ （C は積分定数）

また $g(x)=(9x^2-1)e^{-3x}$ とおくと　$g(x)=(3x-1)(3x+1)e^{-3x}$

よって，$0\leqq x\leqq\frac{1}{3}$ のとき $g(x)\leqq 0$，$\frac{1}{3}\leqq x\leqq 1$ のとき $g(x)\geqq 0$ であるから

$$\int_0^1|g(x)|\,dx=-\int_0^{\frac{1}{3}}g(x)\,dx+\int_{\frac{1}{3}}^1 g(x)\,dx$$

ここで　$\displaystyle\int g(x)\,dx=\int(9x^2-1)e^{-3x}\,dx=9\left\{-\left(\frac{9x^2+6x+2}{27}\right)e^{-3x}\right\}+\frac{1}{3}e^{-3x}$

$\displaystyle =-\frac{1}{3}(9x^2+6x+1)e^{-3x}=-\frac{1}{3}(3x+1)^2e^{-3x}$

$=G(x)$

とおくと（ただし，積分定数は省略した），

$$G(0)=-\frac{1}{3},\quad G\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}e^{-1},\quad G(1)=-\frac{16}{3}e^{-3}$$

これを用いると

$$\int_0^1|g(x)|\,dx=\Big[-G(x)\Big]_0^{\frac{1}{3}}+\Big[G(x)\Big]_{\frac{1}{3}}^1=-2G\left(\frac{1}{3}\right)+G(0)+G(1)$$

$$=-2\left(-\frac{4}{3}e^{-1}\right)-\frac{1}{3}-\frac{16}{3}e^{-3}$$

$$=\frac{1}{3}(-1+8e^{-1}-16e^{-3})$$

(2)　$f(x)=(px^2+qx+r)e^{-3x}$ より

$$f'(x)=(2px+q)e^{-3x}-3(px^2+qx+r)e^{-3x}$$
$$=\{-3px^2+(2p-3q)x+q-3r\}e^{-3x}$$

$x=0$ で極大値，$x=1$ で極小値をとるとき，$f'(0)=f'(1)=0$ が成り立つから，$e^{-3x}>0$ に注意すると

$$q-3r=0,\quad -p-2q-3r=0 \qquad \therefore\quad q=3r,\quad p=-9r$$

このとき　$f'(x)=(27rx^2-27rx)e^{-3x}=27rx(x-1)e^{-3x}$

$r=0$ のとき $f'(x)=0$ であるから，$f(x)$ は極値をもたない.

$r>0$ のとき，$f(x)$ は $x=0$ で極大値，$x=1$ で極小値をもつ.

$r<0$ のとき，$f'(x)$ は $x=0$ で極小値，$x=1$ で極大値をもつ.

したがって，関数 $f(x)$ が $x=0$ で極大，$x=1$ で極小となるための必要十分条件は

$$p=-9r,\quad q=3r,\quad r>0 \text{（⓪）}$$

さらに，$f(x)$ の極小値が -1 であるとき，$f(1)=-1$ より　$(p+q+r)e^{-3}=-1$

$p=-9r$，$q=3r$ を代入すると　$-5re^{-3}=-1 \qquad \therefore\quad r=\dfrac{e^3}{5}$

よって極大値は　$f(0)=r=\dfrac{e^3}{5}$

このとき　$f(x)=(-9rx^2+3rx+r)e^{-3x}=\dfrac{e^3}{5}(-9x^2+3x+1)e^{-3x}$

(1) の結果を用いると

$$\int(-9x^2+3x+1)e^{-3x}\,dx=-9\cdot\left\{-\left(\frac{9x^2+6x+2}{27}\right)e^{-3x}\right\}+3\cdot\left\{-\left(\frac{3x+1}{9}\right)e^{-3x}\right\}-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$$
$$=(3x^2+x)e^{-3x}+C$$

であるから，

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{e^3}{5}\Big[(3x^2+x)e^{-3x}\Big]_0^1=\frac{e^3}{5}\cdot 4e^{-3}=\frac{4}{5}$$

［Ⅲ］

(1)(a)　∠BAC＝∠ABC のとき AC＝BC が成り立つから，点 C は線分 AB の垂直二等分線上に存在する．よって，∠BAC＜∠ABC を満たすとき，BC＜AC が成り立つから，点 C は線分 AB の垂直二等分線に関して，B が含まれる領域に存在する．
このことと，点 C の y 座標が正であることから，点 C は第 1 象限に存在する．

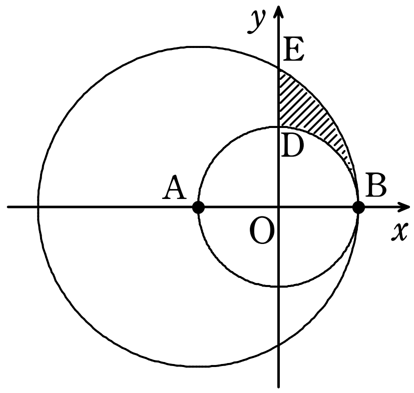
(b)　∠ABC＝∠ACB のとき，AB＝AC が成り立つから，点 C は点 A を中心とし点 B を通る円上に存在する．よって，∠ABC＜ACB を満たすとき，点 C は点 A を中心とし点 B を通る円（①）の内部（①）に存在する．

(c)　$\angle \mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つとき，円周角の定理により，点 C は線分 AB を直径とする円周上に存在する．よって，$\angle \mathrm{ACB}<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，点 C は線分 AB を直径とする円（③）の外部（③）に存在する．

(d)　$\angle \mathrm{BAC} \leqq \angle \mathrm{ABC} \leqq \angle \mathrm{ACB} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき(a)～(c) より，点 C が存在する領域は，右の図の斜線部分となる．ただし，境界を含む．D (0, 1)，E $(0,\ \sqrt{3})$ とすると，△OAE は OA : AE : EO＝1 : 2 : $\sqrt{3}$ の直角三角形であるから，点 C が存在する領域の面積は

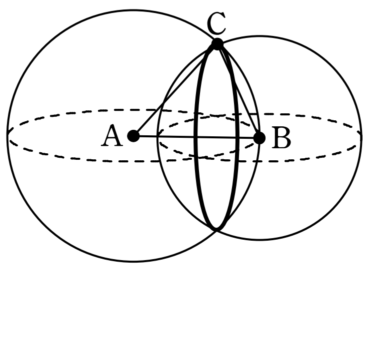
(扇形ABE)－(△OAE)－(扇形OBD)

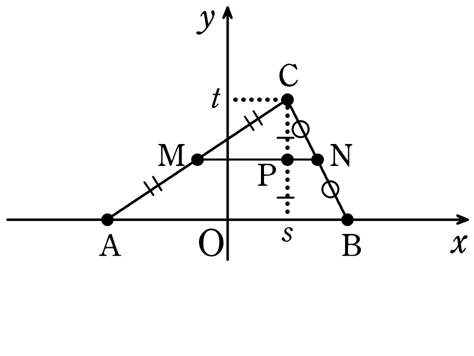
$$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



(2)(a)　$\angle \mathrm{ADC}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，円周角の定理により，点 D は線分 AC を直径とする球面上（②）に存在する．

(b)　$\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{BDC}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，点 D は線分 AC を直径とする球面と，線分 BC を直径とする球面の交線である円上に存在する．この円を C_1，中心を P とする．
線分 AC の中点を M，線分 BC の中点を N とすると，点 P は線分 MN 上に存在する．
$\mathrm{M}\left(\dfrac{s-1}{2},\ \dfrac{t}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{N}\left(\dfrac{s+1}{2},\ \dfrac{t}{2},\ 0\right)$ であることと，点 D の x 座標が s であることから，点 P の座標は $\left(s,\ \dfrac{t}{2},\ 0\right)$ である．また，円 C_1 は点 P を中心とし，点 C を通ることから，半径は $\dfrac{t}{2}$ である．
したがって，点 D は $\left(s,\ \dfrac{t}{2},\ 0\right)$（⑥）を中心とする，半径 $\dfrac{t}{2}$（⑥）の円周上にある．





(c)　$t=\dfrac{4}{3}$ のとき　　$\mathrm{C}\left(s,\ \dfrac{4}{3},\ 0\right)$

点 C について，∠BAC＜∠ABC＜∠ACB であるから，(1) より次の式が成り立つ.

$$\begin{cases} s>0 & \cdots\cdots③ \\ (s+1)^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2<4 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

④ より　　$(s+1)^2<4-\dfrac{16}{9}=\dfrac{20}{9}$

よって　　$-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}<s+1<\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　　　$\therefore$　$-1-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}<s<-1+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

③ との共通部分を考えると　　$0<s<-1+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

(b) より D は中心 $\left(s,\ \dfrac{2}{3},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{2}{3}$ の円上にある．この円の中心は xy 平面上にあることから，

点 D の z 座標を円の半径 $\dfrac{2}{3}$ とすることができれば，このとき四面体 ABCD の高さは最大となり，

体積も最大となる.

$\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{\pi}{2}$ から，点 D は球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上にあるから，$\begin{cases} x=s \\ y=\dfrac{2}{3} \\ z=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ とすると，

$$s^2+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=1 \qquad \therefore\quad s^2=\frac{1}{9}$$

$0<s<-1+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ であるから　　$s=\dfrac{1}{3}$

よって，点 D の z 座標が $\dfrac{2}{3}$ となる s は確かに存在し，このときの体積の最大値は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

別解 1　(1)で図形的な読み取りが困難な場合は，点 C の存在領域を表す不等式を導いてもよい.

$\mathrm{C}(x,\ y)\ (y>0)$ とすると，$\mathrm{AC}^2=(x+1)^2+y^2$，$\mathrm{BC}^2=(x-a)^2+y^2$

(a)　∠BAC＜∠ABC を満たすとき，$\mathrm{BC}^2<\mathrm{AC}^2$ が成り立つから

$$(x-1)^2+y^2<(x+1)^2+y^2 \qquad \therefore\quad x>0$$

よって，点 C の存在領域は連立不等式 $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ が表す領域であるから，点 C は第 1 象限に存在する.

(b)　∠ABC＜ACB を満たすとき，$\mathrm{AC}^2<\mathrm{AB}^2$ が成り立つから　　$(x+1)^2+y^2<4$

よって，点 C の存在領域は，点 $(-1,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円の内部，すなわち，点 B を中心とし点 B を通る円（⓵）の内部（⓵）である.

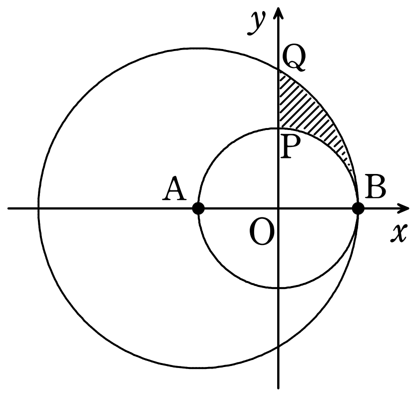
(c)　$\angle \mathrm{ACB} < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，$\mathrm{AB}^2 < \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$ が成り立つから

$$4 < (x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 \qquad \therefore \quad x^2 + y^2 > 1$$

よって，点 C の存在領域は，点 O を中心とする半径 1 の円の外部，すなわち，線分 AB を直径とする円（③）の外部（③）である．

(d)　$\angle \mathrm{BAC} \leqq \angle \mathrm{ABC} \leqq \angle \mathrm{ACB} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，(a)～(c) より

$$\begin{cases} y > 0 \\ x \geqq 0 \\ (x+1)^2 + y^2 \leqq 4 \\ x^2 + y^2 \geqq 1 \end{cases}$$



よって，点 C の存在領域は，右図の斜線部分である．
ただし，境界を含む．（以下，面積に関しては本解答同様）

別解１終わり

別解２　(2)(a)で図形的な読み取りが困難な場合は，点 D の満たす図形の方程式を導けばよい．

(2)(b)　$\mathrm{D}(x,\ y,\ z)\ (z > 0)$ とおくと，$\angle \mathrm{ADC} = \dfrac{\pi}{2}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$

よって　$(x+1,\ y,\ z) \cdot (x-s,\ y-t,\ z) = 0$

$$(x+1)(x-s) + y(y-t) + z^2 = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{s-1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{t}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{(s-1)^2 + t^2}{4}$$

これは中心$\left(\dfrac{s-1}{2},\ \dfrac{t}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{(s-1)^2 + t^2}}{2}$ の球面を表すから，
点 D は線分 AC を直径とする球面上（②）に存在する．

別解２終わり

別解３　(2)(b)は球面の方程式を用いてもよい．

(2)(b)　$\angle \mathrm{ADC} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，点 D は線分 AC を直径とする球面上にある．

線分 AC を直径とする球面の方程式は　$\left(x - \dfrac{s-1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{t}{2}\right)^2 + z^2 = \dfrac{(s+1)^2 + t^2}{4}$

点 D の x 座標は s であるから，$x = s$ とすると

$$\left(s - \frac{s-1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{t}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{(s+1)^2 + t^2}{4}$$

$$\therefore \quad \left(y - \frac{t}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{t^2}{4}$$

よって，$t > 0$ であるから，点 D は$\left(s,\ \dfrac{t}{2},\ 0\right)$（⑥）を中心とする，半径 $\dfrac{t}{2}$（⑥）の円周上にある．

別解３終わり

参考１　(2)(b)において，点 D の x 座標が s であることは，次のように確認することができる．

$\angle\mathrm{ADC}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，点 D は線分 AC を直径とする球面上にある．

線分 AC を直径とする球面の方程式は　$\left(x-\dfrac{s-1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{t}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{(s+1)^2+t^2}{4}$　……①

また，$\angle\mathrm{BDC}=\dfrac{\pi}{2}$ より，点 D は線分 BC を直径とする球面上にある．

線分 BC を直径とする球面の方程式は　$\left(x-\dfrac{s+1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{t}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{(s-1)^2+t^2}{4}$　……②

①－② より　$2x=2s$　$\therefore$　$x=s$

よって，点 D の x 座標は s である．

参考１終わり

別解４　(2)(c)の z 座標の最大は，z を s の関数で表して考えてもよい．

(c)（ s の範囲を求める部分は，本解答と同じ）

D$(s,\ y,\ z)$ $(z>0)$ とし，四面体 ABCD の体積を V とすると，

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times z=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{4}{3}\times z=\frac{4}{9}z$$

したがって，体積 V が最大となるのは，z が最大となるときである．

$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDC}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，(2) (b) において $t=\dfrac{4}{3}$ とすると　$\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2+z^2=\dfrac{4}{9}$　……⑤

また，$\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{\pi}{2}$ より，点 D は線分 AB を直径とする球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上にあるから

$$s^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots\cdots⑥$$

⑤－⑥ より　$-s^2-\dfrac{4}{3}y=-1$　$\therefore$　$y=\dfrac{3}{4}(1-s^2)$

よって ⑥ より　$z^2=1-s^2-y^2=1-s^2-\dfrac{9}{16}(1-s^2)^2$

$$=-\frac{9}{16}\left\{(1-s^2)-\frac{8}{9}\right\}^2+\frac{4}{9}$$

$0<s<-1+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ より　$0<s^2<\dfrac{29-12\sqrt{5}}{9}$　$\therefore$　$\dfrac{12\sqrt{5}-20}{9}<1-s^2<1$

$\dfrac{12\sqrt{5}-20}{9}<\dfrac{8}{9}<1$ であるから，z^2 は $1-s^2=\dfrac{8}{9}$ のとき最大値 $\dfrac{4}{9}$ をとり，$z>0$ であるから，

z も最大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる．

$1-s^2=\dfrac{8}{9}$ より　$s^2=\dfrac{1}{9}$　$\therefore$　$s=\dfrac{1}{3}$ $(\because\ s>0)$

以上より，四面体ABCD の体積 V は，$s=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$ をとる．

別解４終わり