解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2022年度　日本医科大学　後期

【　講　評　】

出題数，出題形式ともに例年通りで変化はなかった．解法に迷うような問題は少なかったが，計算量が多く，得点に結びつけるのは容易ではない．以下，大問ごとに特徴を述べる．

［Ⅰ］多項式の割り算の余りに関する問題であった．二項定理を用いて剰余の部分を把握すればよい．文字や項が多く，やや計算が面倒であるが，典型的な問題なので，確実に得点したい問題である．また，3点が同一直線上にあり，x 座標が等差数列であることから，y 座標も等差数列になればよいことは容易に読み取れるだろう．

［Ⅱ］問１は確率，問２は確率に関する極限と，いずれも簡単な問題であるため落とせない．問３はやや計算が面倒であるが，問題文に e の定義式を用いる指示があるため，これに従って式変形できればよい．

［Ⅲ］空間図形（ベクトル）に関する最大・最小問題であった．問１は点Pの内分比をベクトルで求める典型問題であるから，確実に得点したい．問２は四面体の対称面に注目できるかどうかがポイントであるが，苦手とする人も多いテーマであるため，差がつくだろう．問３は問２までができていれば容易だが，問４は与えられた内積の条件処理が難しく，最後まで解ききれなかった人が多いだろう．受験生の出来が悪い大問であることが予想される．

［Ⅳ］数Ⅲの微分法，積分法に関する問題であった．問１の法線の方程式は問題ないだろう．問２は法線の交点の極限を求めることになるが，微分係数の定義式を用いることに気付けるかどうかがポイントで，ここで差がつくだろう．問３は問２が解ければ簡単な計算問題である．問４はここまでの結果を用いて定積分計算を行うだけであるが，やや計算力や発想力が必要となるため，得点できた人は少ないだろう．

全体的な難易度は昨年と同程度である．全体で6割程度の得点を目指したい．

【　解　答　】

［Ⅰ］式と証明（数Ⅱ）／数列（数Ｂ）【標準】

問１　ア：2,　イ：1,　ウ：2,　エ：1,　オ：2,　カ：4,　キ：4,　ク：4,　ケ：4,
　　　コ：6,　サ：4,　シ：2,　ス：3,　セ：2,　ソ：2,　タ：1,　チ：2,

問２　ツ：3,　テ：2,　ト：3

［Ⅱ］確率（数Ａ）／極限（数Ⅲ）【標準】

問１　ア：3,　イ：4,　ウ：2,　エ：3,　オ：3,　カ：2,　キ：1,　ク：1,　ケ：2,
　　　コ：3,　サ：4,

問２　$\alpha=\dfrac{3}{4}$

問３　$\beta=e$

［Ⅲ］ベクトル（数Ｂ）／図形と計量（数Ⅰ）／２次関数（数Ⅰ）【やや難】

問１　$\dfrac{\mathrm{DP}}{\mathrm{AP}}=3$

問２　$\dfrac{2}{3}l\leqq x<l$

問３　$V=\dfrac{2}{9}lx\sqrt{l^2-x^2}$

問４　$\sqrt{2}\leqq l$ のとき　$V_{\max}=\dfrac{l^3}{9}$，$\dfrac{\sqrt{6}}{2}\leqq l<\sqrt{2}$ のとき　$V_{\max}=\dfrac{2l\sqrt{-l^4+3l^2-1}}{9(3-l^2)}$

［Ⅳ］微分法・積分法（数Ⅲ）【標準】

問１　$y=-\dfrac{1}{f'(t)}x+\dfrac{t}{f'(t)}+f(t)$

問２　ア：$\dfrac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}$,　イ：$\dfrac{\{f'(t)\}^2+1}{f''(t)}$

問３　$R(t)=\dfrac{(\{f'(t)\}^2+1)^{\frac{3}{2}}}{f''(t)}$

問４　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\dfrac{e-1}{e}}$

【 問 題 】

［ I ］

以下の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．なお，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること．

問 1　3 以上の整数 m と実数 a (ただし，$a \fallingdotseq 2$) に対し，x の m 次式 $(2x-a)^m$ を $(x-1)^3$ で割ったときの余りを

$$(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{3} P_n(m)x^{3-n}$$

と表すとき，m の 2 次式 $P_n(m)$ $(n=1,\ 2,\ 3)$ を平方完成した形で求めると，

$$P_1(m)=\boxed{\text{ア}}\left(m-\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^2-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

$$P_2(m)=-\boxed{\text{カ}}\left(m-\frac{\boxed{\text{キ}}-a}{\boxed{\text{ク}}}\right)^2+\frac{a^2-\boxed{\text{ケ}}\,a+\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

$$P_3(m)=\boxed{\text{シ}}\left(m-\frac{\boxed{\text{ス}}-a}{\boxed{\text{セ}}}\right)^2+\frac{a^2-\boxed{\text{ソ}}\,a-\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

となる．

問 2　問 1 において，数列

$$\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ \frac{\boxed{\text{キ}}-a}{\boxed{\text{ク}}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}-a}{\boxed{\text{セ}}}$$

は初項 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，公差 $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}-a}{\boxed{\text{テ}}}$ の等差数列となる．また座標平面上の 3 点

$$\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\right),\ \left(\frac{\boxed{\text{キ}}-a}{\boxed{\text{ク}}},\ \frac{a^2-\boxed{\text{ケ}}\,a+\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right),\ \left(\frac{\boxed{\text{ス}}-a}{\boxed{\text{セ}}},\ \frac{a^2-\boxed{\text{ソ}}\,a-\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

が同一直線上にあるための a に対する必要十分条件は $a=\boxed{\text{ト}}$ である．

［Ⅱ］

n を3以上の整数とする．中が見えない袋の中に白球が n 個，黒玉が n 個，赤球が3個入っており，袋の中から3個の球を無作為に同時に取り出す試行を行う．取り出した3個の球の色の種類が2である確率を p_n とする．また，取り出した3個の球の色の種類が2であり，かつその3個の球に赤球が含まれない確率を q_n とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

また，以下の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{サ}$ に適する1以上の整数を解答欄に記入せよ．

ただし，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること．

問1　数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めると

$$p_n=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\frac{n^3+\boxed{ウ}n^2+\boxed{エ}n}{\left(n+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)\left(n+\boxed{キ}\right)\left(n+\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\right)}\quad\left(\text{ただし，}\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}>\boxed{キ}>\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\right)$$

となる．

問2　数列 $\{q_n\}$ の極限を $\alpha=\lim_{n\to\infty}q_n$ とすると， $\alpha=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ となる．

問3　問2の α に対し，極限 $\beta=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{p_n}\right)^n$ の値を求めよ．必要ならば自然対数の底の定義

$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ (ただし， t は実数) を用いてよい．

［Ⅲ］

実数の定数 l は $l\geqq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ を満たすとする．四面体ABCDにおいて， $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=l$，辺ABを $1:5$ に内分する点をL，辺BCの中点をM，辺CDを $5:3$ に内分する点をNとし，これら3点で定まる平面LMNと直線ADとの交点をPとする．また，点Pから平面BCDに垂線PHを下ろしたとき， $\mathrm{PH}=\dfrac{l}{2}$ であるとする． $x=\mathrm{AM}$ とおき，四面体ABCDの体積を V として，以下の各問いに答えよ．

問1　$\dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}}$ を求めよ．

問2　x がとりうる値の範囲を求めよ．答えのみでよい．

問3　V を l と x を用いて表せ．答えのみでよい．

問4　l を固定して， $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\geqq\dfrac{2}{3}$ を満たすように x を動かすとき， V の最大値 $V_{\max}$ を求めよ．

［IV］

関数 $f(x)$ $(x>0)$ は連続で，第 1 次導関数 $f'(x)$ が存在して連続で，第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在し，かつ $f'(x)>0$， $f''(x)>0$ を満たすと仮定する．座標平面において，曲線 C : $y=f(x)$ 上の点 A $(t,\ f(t))$ における C の法線と，点 B $(t+h,\ f(t+h))$ $(h \fallingdotseq 0)$ における C の法線の交点を $\mathrm{P}(h)$ とおく． h を 0 に限りなく近づけるとき，点 $\mathrm{P}(h)$ が限りなく近づく点を P とする．また， 2 点 A，P の距離を $R(t)$ とおく．

問 1　点 A $(t,\ f(t))$ における C の法線の方程式を， t， $f(t)$， $f'(t)$ を用いて表せ．答えのみでよい．

問 2　点 P の座標を以下の形で求めよ．

$$\left(t-\boxed{\quad ア \quad},\ f(t)+\boxed{\quad イ \quad}\right)$$

問 3　 $R(t)$ を求めよ．答えのみでよい．

問 4　以上の結果を用いて，関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{e^{2t}-1}\ dt$ $(x>0)$ に対して，次の定積分 I の値を求めよ．

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2} \frac{1}{R(t)}\ dt$$

【　解　説　】

［Ⅰ］

問１　二項定理により

$$(2x-a)^m=\{2(x-1)+(2-a)\}^m$$

$$=\sum_{k=0}^{m-3}{}_m\mathrm{C}_k\{2(x-1)\}^{m-k}(2-a)^k+{}_m\mathrm{C}_2\{2(x-1)\}^2\cdot(2-a)^{m-2}+{}_m\mathrm{C}_1 2(x-1)(2-a)^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_0(2-a)^m$$

$$=\sum_{k=0}^{m-3}{}_m\mathrm{C}_k\{2(x-1)\}^{m-k}(2-a)^k+(2-a)^{m-2}\{2m(m-1)(x-1)^2+2m(x-1)(2-a)+(2-a)^2\}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-3}{}_m\mathrm{C}_k\{2(x-1)\}^{m-k}(2-a)^k+(2-a)^{m-2}[(2m^2-2m)x^2+\{-4m^2+(8-2a)m\}x$$

$$+2m^2-2(3-a)m+(a-2)^2]$$

このとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{m-3}{}_m\mathrm{C}_k\{2(x-1)\}^{m-k}(2-a)^k$ は，$m-k\geqq 3$ より $(x-1)^3$ で割り切れる．

$(2x-a)^m$ を $(x-1)^3$ で割った余りは

$$(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{3}P_n(m)x^{3-n}=(2-a)^{m-2}\{P_1(m)x^2+P_2(m)x+P_3(m)\}$$

であるから，これと比較すると

$$P_1(m)=2m^2-2m=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$P_2(m)=-4m^2+(8-2a)m=-4\left(m-\frac{4-a}{4}\right)^2+\frac{a^2-8a+16}{4}$$

$$P_3(m)=2m^2-2(3-a)m+(a-2)^2=2\left(m-\frac{3-a}{2}\right)^2+\frac{a^2-2a-1}{2}$$

問２　数列 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{4-a}{4}$，$\dfrac{3-a}{2}$ について

$$\frac{4-a}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2-a}{4},\quad \frac{3-a}{2}-\frac{4-a}{4}=\frac{2-a}{4}$$

よって，初項 $\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{3-a}{2}$ の等差数列である．

また，座標平面上の３点 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{4-a}{4},\ \dfrac{a^2-8a+16}{4}\right)$，$\left(\dfrac{3-a}{2},\ \dfrac{a^2-2a-1}{2}\right)$

について，x 座標がこの順で等差数列をなすから，同一直線上にあるための必要十分条件は，

y 座標もこの順で等差数列をなすことである．したがって

$$2\cdot\frac{a^2-8a+16}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{a^2-2a-1}{2}$$

$$a^2-8a+16=a^2-2a-2$$

$$6a=18\qquad\therefore\quad a=3$$

$\boxed{\text{別解}}$　問１の余りは，割り算の恒等式を用いて求めてもよいが，計算は面倒になる．

$(2x-a)^m$ を $(x-1)^3$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおくと

$$(2x-a)^m=(x-1)^3Q(x)+(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{3}P_n(m)x^{3-n}\quad\cdots\cdots①$$

① 式の両辺を x で微分すると

$$2m(2x-a)^{m-1}=3(x-1)^2Q(x)+(x-1)^3Q'(x)+(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{2}(3-n)P_n(m)x^{2-n}\quad\cdots\cdots②$$

② 式の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}4m(m-1)(2x-a)^{m-2}&=6(x-1)Q(x)+3(x-1)^2Q'(x)+3(x-1)^2Q'(x)+(x-1)^3Q''(x)\\&\quad+(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{1}(3-n)(2-n)P_n(m)\\&=6(x-1)Q(x)+3(x-1)^2Q'(x)+3(x-1)^2Q'(x)+(x-1)^3Q''(x)\\&\quad+2(2-a)^{m-2}P_1(m)\quad\cdots\cdots③\end{aligned}$$

③ 式の両辺に $x=1$ を代入すると

$$4m(m-1)(2-a)^{m-2}=2(2-a)^{m-2}P_1(m)$$

$a\fallingdotseq 2$ であるから

$$\begin{aligned}P_1(m)&=2m(m-1)=2m^2-2m\quad\cdots\cdots④\\&=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

② 式の両辺に $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}2m(2-a)^{m-1}&=(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{2}(3-n)P_n(m)\\&=(2-a)^{m-2}\{2P_1(m)+P_2(m)\}\end{aligned}$$

$a\fallingdotseq 2$ であるから

$$2m(2-a)=2P_1(m)+P_2(m)$$

④ を代入すると

$$\begin{aligned}P_2(m)&=2m(2-a)-2(2m^2-2m)=-4m^2+(8-2a)m\quad\cdots\cdots⑤\\&=-4\left(m-\frac{4-a}{4}\right)^2+\frac{a^2-8a+16}{4}\end{aligned}$$

① 式の両辺に $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(2-a)^m&=(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{3}P_n(m)\\&=(2-a)^{m-2}\{P_1(m)+P_2(m)+P_3(m)\}\end{aligned}$$

$a\fallingdotseq 2$ であるから

$$(2-a)^2=P_1(m)+P_2(m)+P_3(m)$$

④，⑤ を代入すると

$$\begin{aligned}P_3(m)&=(2-a)^2-(2m^2-2m)-\{-4m^2+(8-2a)m\}\\&=2m^2-(6-2a)m+(2-a)^2\\&=2\left(m-\frac{3-a}{2}\right)^2+\frac{a^2-2a-1}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

［Ⅱ］

問１　p_n に対応する事象の余事象は，取り出した３個の球の色の種類が３または１であることである．

取り出した３個の球の色の種類が３であるのは，各色の球を１つずつ取り出すときであるから，

その確率は　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3}=\dfrac{3n^2}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3}$

また，取り出した３個の球の色の種類が１であるのは，１色の球を３個取り出すときであるから，

その確率は　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3}=\dfrac{2{}_n\mathrm{C}_3+1}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3}$

よって，

$$p_n=1-\left(\frac{3n^2}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3}+\frac{2{}_n\mathrm{C}_3+1}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3}\right)=1-\frac{n^3+6n^2+2n+3}{(2n+3)(n+1)(2n+1)}$$

$$=\frac{3n^3+6n^2+9n}{(2n+3)(n+1)(2n+1)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{n^3+2n^2+3n}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

問２　白球を a 個，黒玉を b 個，赤球を c 個取り出すことを $(a,\ b,\ c)$ と表す．

取り出した３個の球の色の種類が２であり，かつその３個の球に赤球が含まれないのは $(2,\ 1,\ 0)$ または $(1,\ 2,\ 0)$ のときであるから，その確率は

$$q_n=\frac{{}_n\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{6n^2(n-1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}=\frac{3n^2(n-1)}{(2n+3)(n+1)(2n+1)}$$

よって

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{4}$$

問３

$$\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)^n=\left\{\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^3+2n^2+3n}\right\}^n=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^2+2n+3}\right\}^n$$

$$=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{4}}\right\}^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{\left\{1+\frac{9}{(2n+3)(2n+1)}\right\}^n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left[\frac{1}{\left\{1+\frac{9}{(2n+3)(2n+1)}\right\}^{\frac{(2n+3)(2n+1)}{9}}}\right]^{\frac{9}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ が成り立つから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{9}{(2n+3)(2n+1)}\right\}^{\frac{(2n+3)(2n+1)}{9}}=e$$

よって

$$\beta=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)^n=e\cdot e^{\frac{9}{2\cdot 2}\cdot 0}=e$$

［Ⅲ］

問１　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\frac{1}{6}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{3\vec{c}+5\vec{d}}{8}$$

点 P は平面 LMN 上にあるから，実数 s，t，u を用いて，次のように表せる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}+u\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

$$=\frac{s}{6}\vec{b}+t\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)+u\left(\frac{3\vec{c}+5\vec{d}}{8}\right)=\left(\frac{s}{6}+\frac{t}{2}\right)\vec{b}+\left(\frac{t}{2}+\frac{3}{8}u\right)\vec{c}+\frac{5}{8}u\vec{d}\quad\cdots\cdots①$$

ただし，$s+t+u=1$　……②

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{d}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は同一平面上にないから，点 P が AD 上にあるとき

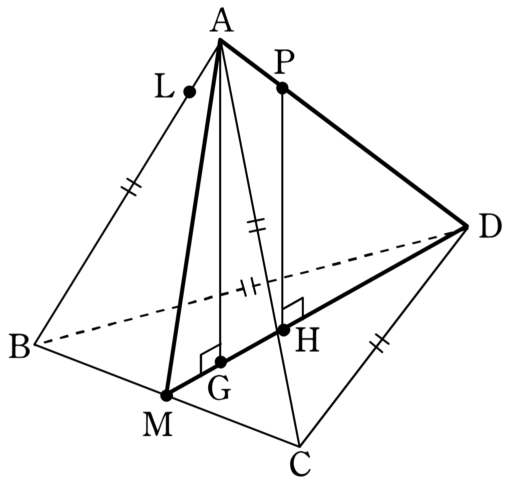
$$\frac{s}{6}+\frac{t}{2}=0,\quad \frac{t}{2}+\frac{3}{8}u=0\qquad \therefore\quad s=-3t,\quad u=-\frac{4}{3}t$$

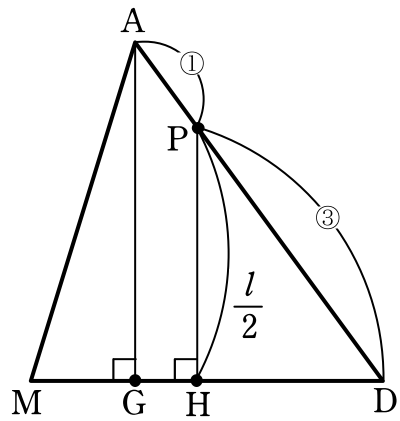
これらを ② に代入すると　$-3t+t-\frac{4}{3}t=1$　　$\therefore\quad t=-\frac{3}{10}$

このとき　$s=\frac{9}{10}$，$u=\frac{2}{5}$

よって，① より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\vec{d}$

したがって　$\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}}=3$





問２　AB$=$AC$=l$ より，△ABC は二等辺三角形であり，DB$=$DC$=l$ より，△DBC も二等辺三角形であるから，△AMD は四面体 ABCD の対称面である．よって，点 A から△BCD へ下ろした垂線の足を G とすると，G および H は線分 DM 上にある．

△DPH∽△DAG であり，$\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{AP}}=3$ より

$$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{PH}}=\frac{4}{3}\qquad \therefore\quad \mathrm{AG}=\frac{4}{3}\mathrm{PH}=\frac{4}{3}\cdot\frac{l}{2}=\frac{2}{3}l$$

△AMG について，AM$\geqq$AG であるから　$x\geqq\frac{2}{3}l$

また，△ABM において，AB$>$AM であるから　$l>x$

よって，x のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{\frac{2}{3}l\leqq x<l}$

問 3　$\mathrm{DM}=\mathrm{AM}=x$，$\mathrm{BC}=2\mathrm{BM}=2\sqrt{l^2-x^2}$ であるから，$\triangle\mathrm{BCD}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2\sqrt{l^2-x^2}=x\sqrt{l^2-x^2}$$

よって，体積 V は　$V=\frac{1}{3}\cdot x\sqrt{l^2-x^2}\cdot\frac{2}{3}l=\boldsymbol{\frac{2}{9}lx\sqrt{l^2-x^2}}$

問 4　l を定数，x を変数とすると　$V=\frac{2}{9}l\sqrt{x^2l^2-x^4}=\frac{2}{9}l\sqrt{-\left(x^2-\frac{l^2}{2}\right)^2+\frac{l^4}{4}}$

この関数の最大値を求める．

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}\geqq 0$ より，$\angle\mathrm{AMD}$ は鋭角または直角である．

このとき $\triangle\mathrm{AMG}$ に注目すると

$$\mathrm{MG}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{AG}^2}=\sqrt{x^2-\frac{4}{9}l^2}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{MG}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{MD}}\right|=x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}l^2}$　……②

また，$\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=l$ より $\mathrm{DM}\perp\mathrm{BC}$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MD}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|^2+\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}\end{aligned}$$

② と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\geqq\frac{2}{3}$ より　$x^2-x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}l^2}\geqq\frac{2}{3}$　$\therefore$　$x^2-\frac{2}{3}\geqq x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}l^2}$

$x\geqq\frac{2}{3}l\geqq\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ より $x^2\geqq\frac{2}{3}$ であるから，両辺を 2 乗すると

$$\left(x^2-\frac{2}{3}\right)^2\geqq x^2\left(x^2-\frac{4}{9}l^2\right)$$

$$-\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{9}\geqq-\frac{4}{9}x^2l^2\qquad\therefore\quad(3-l^2)x^2\leqq 1\quad\cdots\cdots③$$

(Ⅰ) $\sqrt{3}\leqq l$ のとき

不等式 ③ は常に成り立つから　$\frac{2}{3}l\leqq x<l$　$\therefore$　$\frac{4}{9}l^2\leqq x^2<l^2$

$\frac{4}{9}l^2<\frac{l^2}{2}<l^2$ であるから，V は $x^2=\frac{l^2}{2}$ のとき最大となり，その最大値は

$$V_{\max}=\frac{2}{9}l\sqrt{\frac{l^4}{4}}=\frac{l^3}{9}$$

(Ⅱ) $\frac{\sqrt{6}}{2}\leqq l<\sqrt{3}$ のとき

不等式 ③ より　$x^2\leqq\frac{1}{3-l^2}$

ここで　$\frac{l^2}{2}-\frac{1}{3-l^2}=\frac{l^2(3-l^2)-1}{2(3-l^2)}=\frac{-(l^2-2)(l^2-1)}{2(3-l^2)}$

（i） $\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq l < \sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{1}{3-l^2} < \dfrac{l^2}{2}$ であるから， V は $x^2 = \dfrac{1}{3-l^2}$ のとき最大となり，その最大値は

$$V_{\max} = \frac{2}{9} l \sqrt{\frac{1}{3-l^2}\left(-\frac{1}{3-l^2}+l^2\right)} = \frac{2l\sqrt{-l^4+3l^2-1}}{9(3-l^2)}$$

（ii） $\sqrt{2} \leqq l < \sqrt{3}$ のとき

$\dfrac{l^2}{2} \leqq \dfrac{1}{3-l^2}$ であるから， V は $x^2 = \dfrac{l^2}{2}$ のとき最大となり，その最大値は

$$V_{\max} = \frac{2}{9} l \sqrt{\frac{l^4}{4}} = \frac{l^3}{9}$$

以上をまとめると

$\sqrt{2} \leqq l$ のとき　　$V_{\max} = \dfrac{l^3}{9}$

$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq l < \sqrt{2}$ のとき　　$V_{\max} = \dfrac{2l\sqrt{-l^4+3l^2-1}}{9(3-l^2)}$

$\boxed{\text{別解}}$　問 4 の内積の処理は，次のようにやってもよい.

$\angle \mathrm{MAD} = \theta \ (0 < \theta < \pi)$ とおく.

$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MD}} \geqq 0$ より　　$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}||\overrightarrow{\mathrm{MD}}|\cos\theta \geqq 0$

よって　　$\cos\theta \geqq 0$　　$\therefore$　$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

また， $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = l$ より $\overrightarrow{\mathrm{MB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MA}}$， $\mathrm{DB} = \mathrm{DC} = l$ より $\overrightarrow{\mathrm{MB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MD}}$ であるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} &= (\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{MD}} - \overrightarrow{\mathrm{MA}}) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MD}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MD}} + |\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 \\
&= -|\overrightarrow{\mathrm{MA}}||\overrightarrow{\mathrm{MD}}|\cos\theta + |\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 \\
&= x^2(1-\cos\theta)
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} \geqq \dfrac{2}{3}$ より　　$x^2(1-\cos\theta) \geqq \dfrac{2}{3}$　……④

$\triangle \mathrm{AMG}$ において　　$\mathrm{AM}\sin\theta = \mathrm{AG}$　　$\therefore$　$x\sin\theta = \dfrac{2}{3} l$　……⑤

⑤ より　　$\sin\theta = \dfrac{2l}{3x}$

$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta \geqq 0$ であるから　　$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{4l^2}{9x^2}}$

これを ④ に代入すると　　$x^2\left(1-\sqrt{1-\dfrac{4l^2}{9x^2}}\right) \geqq \dfrac{2}{3}$

$$x^2 - \frac{2}{3} \geqq x^2\sqrt{1-\frac{4l^2}{9x^2}} = x^2\sqrt{1-\frac{4}{9}l^2}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

［Ⅳ］

問 1　$y=f(x)$ 上の点A $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は

$$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t) \qquad \therefore\quad y=-\frac{1}{f'(t)}x+\frac{t}{f'(t)}+f(t) \quad \cdots\cdots①$$

問 2　$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{B}(t+h,\ f(t+h))$ における法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{f'(t+h)}x+\frac{t+h}{f'(t+h)}+f(t+h) \quad \cdots\cdots②$$

①，② を連立させると，$h \fallingdotseq 0$ のときの交点の x 座標を x とすれば

$$-\frac{1}{f'(t)}x+\frac{t}{f'(t)}+f(t)=-\frac{1}{f'(t+h)}x+\frac{t+h}{f'(t+h)}+f(t+h)$$

$$-f'(t+h)x+tf'(t+h)+f(t)f'(t+h)=-f'(t)x+(t+h)f'(t)+f'(t)f(t+h)$$

$$\{f'(t+h)-f'(t)\}x=t\{f'(t+h)-f'(t)\}-f'(t)f'(t+h)\{f(t+h)-f(t)\}-hf'(t)$$

$$\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}x=t\cdot\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}-f'(t)f'(t+h)\cdot\frac{f(t+h)-f(t)}{h}-f'(t)$$

$$\therefore\quad x=\frac{t\cdot\dfrac{f'(t+h)-f'(t)}{h}-f'(t)f'(t+h)\cdot\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}-f'(t)}{\dfrac{f'(t+h)-f'(t)}{h}}$$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to 0}x=\frac{tf''(t)-f'(t)f'(t)f'(t)-f'(t)}{f''(t)}=t-\frac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}$

x，t が定まれば，y も一意に定まるので，これを ① に代入すると

$$y=-\frac{1}{f'(t)}\left(t-\frac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}\right)+\frac{t}{f'(t)}+f(t)=f(t)+\frac{\{f'(t)\}^2+1}{f''(t)}$$

したがって，点 P の座標は　$\displaystyle\left(t-\frac{\{f(t)\}^3+f(t)}{f''(t)},\ f(t)+\frac{\{f'(t)\}^2+1}{f''(t)}\right)$

問 3　$f(t)=f$，$f'(t)=f'$，$f''(t)=f'$ と表す.

$\displaystyle x=t-\frac{(f')^3+f'}{f''}$，$\displaystyle y=f+\frac{(f')^2+1}{f''}$ であるから

$$\{R(t)\}^2=\mathrm{AP}^2=\left\{t-\frac{(f')^3+f'}{f''}-t\right\}^2+\left\{f+\frac{(f')^2+1}{f''}-f\right\}^2$$

$$=\frac{(f')^2\{(f')^2+1\}^2+\{(f')^2+1\}^2}{(f'')^2}=\frac{\{(f')^2+1\}^3}{(f'')^2}$$

$f'=f'(t)>0$，$f''=f''(t)>0$ であるから

$$R(t)=\frac{(\{f'(t)\}^2+1)^{\frac{3}{2}}}{f''(t)}$$

問 4　$f(x)=\int_0^x \sqrt{e^{2t}-1}\,dt$ より　$f'(x)=\sqrt{e^{2x}-1}$，$f''(x)=2e^{2x}\cdot\frac{1}{2}(e^{2x}-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

これを用いると　$R(t)=\frac{\{(e^{2t}-1)+1\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}}}=e^t\sqrt{e^{2t}-1}$

よって　$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{R(t)}\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}}\,dt$

$\sqrt{e^{2t}-1}=s$ とおくと　$e^{2t}=s^2+1$

$e^t>0$ より　$e^t=\sqrt{s^2+1}$　$\therefore$　$t=\frac{1}{2}\log(s^2+1)$

よって　$\frac{dt}{ds}=\frac{s}{s^2+1}$，

t	$\frac{1}{2}\ \to\ \log 2$
s	$\sqrt{e-1}\ \to\ \sqrt{3}$

したがって　$I=\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{s\sqrt{s^2+1}}\cdot\frac{s}{s^2+1}\,ds=\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,ds$

さらに，$s=\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと　$\frac{ds}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$，

s	$\sqrt{e-1}\ \to\ \sqrt{3}$
θ	$\alpha\ \to\ \frac{\pi}{3}$

ただし，$\tan\alpha=\sqrt{e-1}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ ……③　とする．

よって　$I=\int_\alpha^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_\alpha^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_\alpha^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha$

③ より $\sin\alpha=\sqrt{\frac{e-1}{e}}$ であるから　$I=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{e-1}{e}}}$

$\boxed{\text{別解}}$　原始関数の形をある程度予想し，次のように置換すると容易である．

$s=\frac{\sqrt{e^{2t}-1}}{e^t}$ とおくと

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}}\cdot e^t-\sqrt{e^{2t}-1}\cdot e^t}{e^{2t}}=\frac{1}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}},$$

t	$\frac{1}{2}\ \to\ \log 2$
s	$\sqrt{\frac{e-1}{e}}\ \to\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$I=\int_{\sqrt{\frac{e-1}{e}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}-1}}\cdot\frac{\sqrt{e^{2t}-1}}{e^t}\,ds$

$$=\int_{\sqrt{\frac{e-1}{e}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}ds=\Big[s\Big]_{\sqrt{\frac{e-1}{e}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{e-1}{e}}}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり