# 2022 年度　東海大学（２／２）

【　講　評　】

例年通り大問３題で出題された．$\boxed{1}$はやや易レベルの小問集合で，計算が煩雑な問題もないので，手際よく処理して確実に得点したい．$\boxed{2}$は１次分数関数を題材とした，微分法（数Ⅲ／数Ⅱ）の問題であった．文字が多く計算がやや煩雑であるが，特別な発想が必要ない問題なので，時間をかけてでも確実に得点したい問題である．$\boxed{3}$は図形と方程式と微分法の融合問題であった．図の状態さえ把握できれば標準的な問題であるが，傍心の出題頻度は高くないため，苦戦した受験生が多いのではないだろうか．

全体的な難易度は例年通りであるが，$\boxed{3}$が解きづらく，難しく感じた受験生が多いだろう．全体で 60%～65%程度の得点ができればよいだろう．

【　解　答　】

$\boxed{1}$　小問集合【やや易】

ア：$-256$，　イ：$\dfrac{7}{6}\pi$，　ウ：$2$，　エ：$4$，　オ：$\dfrac{\pi}{9}$，　カ：$-39700$

$\boxed{2}$　微分法（数Ⅲ／数Ⅱ）【標準】

ア：$\dfrac{ac-b}{(x+c)^2}$，　イ：$a+c=0$，　ウ：$-a^2+4a$，　エ：$a-3$，　オ：$a^2-3a$，

カ：$\dfrac{1}{2}a(a-3)^2$，　キ：$2$

$\boxed{3}$　図形と方程式（数Ⅱ）／微分法（数Ⅲ）【やや難】

ア：$\dfrac{\sqrt{a^2+1}-1}{a}$，　イ：$a$，　ウ：$\sqrt{a^2+1}$，　エ：$\dfrac{a^2+1}{4a}$，　オ：$1$，　カ：$\dfrac{1}{2}$，

キ：$\sqrt{\dfrac{(a^2+1)^3}{(5a^2+1)^2}}$，　ク：$\dfrac{\sqrt{35}}{5}$，　ケ：$\dfrac{3\sqrt{15}}{25}$，　コ：$\dfrac{a}{2}$，　サ：$\dfrac{2}{a^2+1}$

【　解　説　】

$\boxed{1}$

(1)　$A=\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,i$ とおくと,

$$A^2=(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})+2\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\,i$$
$$=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$$
$$=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，ド・モアブルの定理を用いて,

$$(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,i)^8=A^8=(A^2)^4$$
$$=\left\{4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^4$$
$$=2^8(\cos\pi+i\sin\pi)=\mathbf{-256}$$

$\boxed{\text{別解}}$　三角関数の値を覚えておけば，次のように解くこともできる.

$\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ，$\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ であるから,

$$(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,i)^8=2^8\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)^8$$
$$=2^8\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^8$$
$$=2^8(\cos\pi+i\sin\pi)=\mathbf{-256}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(2)　三角関数の合成を用いて,

$$y=\sin(-x+\pi)+\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$

よって，$y$ が最小となるのは，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ より,

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi\quad\therefore\ x=\mathbf{\frac{7}{6}\pi}$$

(3)　真数条件より，$8x-8>0$ かつ $x^2>0$ から，$x>1$ ……①

このもとで，$\log_2(8x-8)-\log_2 x^2=1$ は,

$$\log_2(8x-8)=\log_2 x^2+\log_2 2$$
$$\log_2(8x-8)=\log_2 2x^2$$

よって　　$8x-8=2x^2$

$$x^2-4x+4=0$$
$$(x-2)^2=0\qquad\therefore\ x=\mathbf{2}$$ （これは ① を満たす.）

(4)　三角形の 3 辺の長さを $a$, $b$, $c$ (すべて自然数) とする．
2 辺の長さの和が 4 より， $a+b=4$ , $a \geqq b$ …… ① とする．
三角形の成立条件より， $|a-b|<c<a+b$ から，① を用いると，

$$a-b<c<4 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$(a+b)+(a-b)=2a$ より， $a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致し， $a+b=4$ より
$a-b$ は偶数である．
このことに注意すると，①，② を満たす自然数 $a$, $b$, $c$ の組は，次の表のようになる．

| $c$ | $a-b$ | $(a, b)$ |
|---|---|---|
| 3 | 2 または 0 | $(3, 1)$, $(2, 2)$ |
| 2 | 0 | $(2, 2)$ |
| 1 | 0 | $(2, 2)$ |

よって， 3 辺の長さは，

$$(3, 3, 1),\ (3, 2, 2),\ (2, 2, 2),\ (2, 2, 1)$$

の 4 個である．

(5)　$\dfrac{1}{x^2+9}>0$ より， $y=\dfrac{1}{x^2+9}$ , $x$ 軸， $y$ 軸，$x=3\sqrt{3}$ で囲まれた図形の面積 $S$ は，

$$S=\int_0^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9}dx$$

$x=3\tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと， $dx=\dfrac{3}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，

| $x$ | $0 \to 3\sqrt{3}$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0 \to \dfrac{\pi}{3}$ |

したがって，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3}d\theta=\frac{\pi}{9}$$

(6)　$\{a_n\}$ は初項 5 ，交差 $-2$ の等差数列より，

$$a_n=5+(n-1)\cdot(-2)=-2n+7$$
$$a_{4n}=-8n+7$$

よって， $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_{4k}$ は，初項 $a_4$ ，末項 $a_{400}$ ，項数 100 の等差数列の和より，

$$\sum_{k=1}^{100} a_{4k}=\frac{100}{2}(a_4+a_{100})=\frac{100}{2}(-1-793)=-39700$$

$\boxed{2}$

(1)　$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ のとき，

$$f'(x)=\frac{a(x+c)-(ax+b)}{(x+c)^2}=\boldsymbol{\frac{ac-b}{(x+c)^2}}$$

(2)　$y=f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ とおくと，　$y=a-\dfrac{ac-b}{x+c}$

$ac-b\fallingdotseq 0$ より，　$x\fallingdotseq -c$，　$y\fallingdotseq a$ である．

$x$ と $y$ を入れ替えて，

$$x=a-\frac{ac-b}{y+c}\ (x\fallingdotseq a,\ y\fallingdotseq -c)$$

よって，

$$x-a=-\frac{ac-b}{y+c}$$

$$y+c=-\frac{ac-b}{x-a}$$

$$\therefore\ y=f^{-1}(x)=-\frac{ac-b}{x-a}-c$$

$f(x)=f^{-1}(x)$ とすると，

$$a-\frac{ac-b}{x+c}=-\frac{ac-b}{x-c}-c$$

$$a+c=-\frac{(ac-b)(a+c)}{(x-a)(x-c)}$$

$$(a+c)\{(x-a)(x+c)+ac-b\}=0$$

これが $x$ について恒等的に成り立つのは，　$\boldsymbol{a+c=0}$

(3)　$a+c=0$ のとき，(1) より，

$$f(x)=\frac{ax+b}{x-a},\ f'(x)=-\frac{a^2+b}{(x-a)^2}$$

また　$f''(x)=\dfrac{2(a^2+b)}{(x-a)^2}$

$y=f(x)$ と $y=f'(x)$ が $x=t$ において接するとすると，

$$\begin{cases}f(t)=f'(t)\\ f'(t)=f''(t)\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}\dfrac{at+b}{t-a}=-\dfrac{a^2+b}{(t-a)^2} & \cdots\cdots ①\\ -\dfrac{a^2+b}{(t-a)^2}=\dfrac{2(a^2+b)}{(t-a)^3} & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

② より　$-(t-a)=2$　$\therefore\ t=a-2$

① に代入すると，

$$\frac{a(a-2)+b}{-2}=-\frac{a^2+b}{4}$$

$$2(a^2-2a+b)=a^2+b$$

$$\therefore\ \boldsymbol{b=-a^2+4a}$$

(4)(ⅰ) (3) より $f(t)=f'(t)=\dfrac{at+b}{t-a}=\dfrac{a(a-2)+(-a^2+4a)}{-2}=-a$

これより， $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=f'(t)(x-t)+f(t) \\ &=-a(x-(a-2))-a=-ax+a^2-3a \end{aligned}$$

よって， A $(a-3, 0)$ ， B $(0, a^2-3a)$ であるから，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|a-3||a^2-3a|=\frac{1}{2}a(a-3)^2$$

(ⅱ) $a-3<0$ ， $a^2-3a<0$ のとき $0<a<3$

$S(a)=\dfrac{1}{2}a(a-3)^2$ $(0<a<3)$ とおくと，

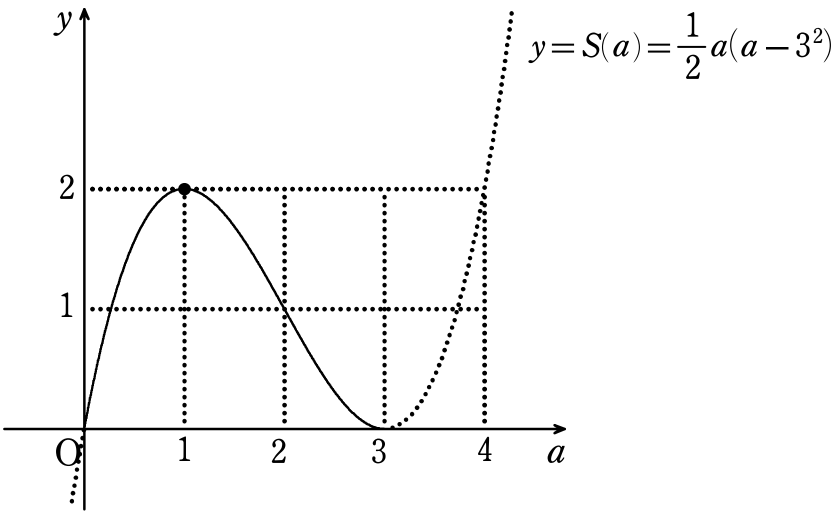
$$S'(a)=\frac{1}{2}(a-3)^2+a(a-3)=\frac{3}{2}(a-3)(a-1)$$

$S'(a)$ は $a=1$ において正から負に符号変化し，このとき $S(a)$ は極大かつ最大となる．

したがって， $\triangle$OAB の最大値は，

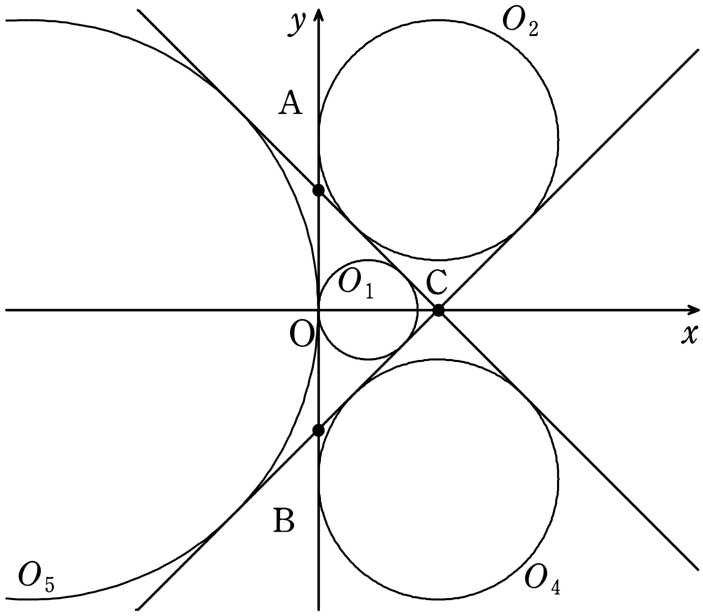
$$S(1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-2)^2=2$$

$\boxed{\text{補足}}$ 3次関数の対称性を利用すれば，微分せずに最大値を把握することができる．



$\boxed{3}$

集合 $S$ に属する円は，下の図の 4 つの円である．すなわち，△ABC の内接円と， 3 つの傍接円である．




三角形の面積を $S$， 3 辺の長さを $a$， $b$， $c$ とする．また，三角形の内接円の半径を $r$，
頂点 A，B，C に対する傍接円の半径を $r_A$， $r_B$， $r_C$ とすると

$$r=\frac{2S}{a+b+c}，\quad r_A=\frac{2S}{-a+b+c}，\quad r_B=\frac{2S}{a-b+c}，\quad r_C=\frac{2S}{a+b-c}$$

$$\therefore \quad r<r_A，\quad r<r_B，\quad r<r_C$$

よって，三角形の内接円の半径は，どの傍接円の半径よりも小さいから，△ABC の内接円が $O_1$ であり，中心が第 1 象限にある傍接円が $O_2$ である．また，中心が第 4 象限にある傍接円を $O_4$，中心が $x<0$ の範囲にある傍接円を $O_5$ とする．

(1)　$O_1$ の半径を $r_1$ とする． $O_1$ は △ABC の内接円である．

$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\sqrt{a^2+1}$， $\mathrm{BC}=2$ であるから， △ABC の面積を 2 通りで表すことで

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a=\frac{1}{2}r_1\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+1}+2\right) \qquad \therefore \quad r_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}+1}=\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{a}$$

(2)　$O_2$ の中心は，頂点 B に対する傍心であるから， ∠ABC の二等分線と， 2 直線 AC，BC のなす角の二等分線の交点である．

∠ABC の二等分線は，点 B と円 $O_1$ の中心を通るから，その方程式は　　$y=\dfrac{1}{r_1}x-1$

また，2 直線AC，BC のなす角の二等分線は $y=0$ または $x=a$ であるが， $O_2$ の中心は第 1 象限にあることから，中心は $x=a$ 上に存在する．

これらを連立させると　　$y=\dfrac{1}{r_1}a-1=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}-1}\cdot a-1=\sqrt{a^2+1}$

よって，$O_2$ の中心の座標は　　$\left(a，\sqrt{a^2+1}\right)$

(3)　$O_3$ は $O_2$，$O_4$ と外接し，$O_2$ と $O_4$ は $x$ 軸に関して対称な円であることから，$O_3$ の中心は $x$ 軸上にある．

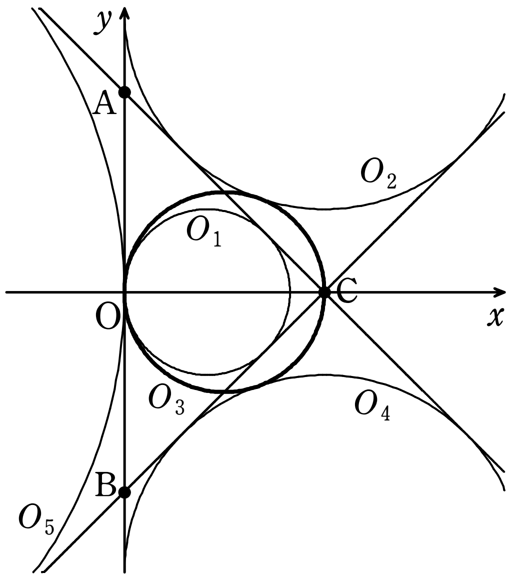
また，$O_1$ と $O_5$ は $(0,\ 0)$ において外接し，$O_3$ もこの点で $O_1$ と内接，$O_5$ と外接するから，$p>0$ とすると，$O_3$ の中心は $(p,\ 0)$，半径は $p$ とおける．

$O_3$ が $O_2$ と外接するとき，中心間距離と半径の和が等しいから

$$(a-p)^2+\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2=(a+p)^2$$

$$a^2+1=4ap \qquad \therefore \quad p=\frac{a^2+1}{4a}$$

よって $O_3$ の半径は　$\dfrac{a^2+1}{4a}$




(4)　$a>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式を用いると

$$\frac{a^2+1}{4a}=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)\geqq\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=\frac{1}{2}$$

等号が成立するのは　$a=\dfrac{1}{a}$　　$\therefore$　$a=1$（$\because$ $a>0$）

よって，$O_2$ の半径は $a=1$ で最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる．

(5)　$O_3$ の半径と $O_2$ の半径の比は　$\dfrac{a^2+1}{4a}:a=a^2+1:4a^2$

$O_2$ と $O_3$ は外接するから，その接点は，2円の中心を結ぶ線分を $a^2+1:4a^2$ の比に内分する点である．よって，接点の $y$ 座標は

$$\frac{4a^2\cdot0+(a^2+1)\cdot\sqrt{a^2+1}}{a^2+1+4a^2}=\frac{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}{5a^2+1}=\sqrt{\frac{(a^2+1)^3}{(5a^2+1)^2}}$$

$f(a)=\dfrac{(a^2+1)^3}{(5a^2+1)^2}$ とおくと

$$f'(a)=\frac{6a(a^2+1)^2\cdot(5a^2+1)^2-(a^2+1)^3\cdot20a(5a^2+1)}{(5a^2+1)^4}$$

$$=\frac{2a(a^2+1)(5a^2-7)}{(5a^2+1)^3}$$

$f'(a)=0$ のとき　$5a^2-7=0$

$a>0$ より　$a=\sqrt{\dfrac{7}{5}}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}$

| $a$ | 0 | | $\frac{\sqrt{35}}{5}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(a)$ | | ↘ | | ↗ |

よって $f(a)$ の $a>0$ における増減は右のようになる．

$a=\dfrac{\sqrt{35}}{5}$ のとき $f(a)$ は最小となり，このとき $y$ 座標 $\sqrt{f(a)}$ も最小となる．

よって，最小値は　$\sqrt{f\left(\dfrac{\sqrt{35}}{5}\right)}=\dfrac{3\sqrt{15}}{25}$

(6)　$O_3$ は中心 $\left(\dfrac{a^2+1}{4a},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{a^2+1}{4a}$ の円であるから，その方程式は

$$\left(x-\frac{a^2+1}{4a}\right)^2+y^2=\left(\frac{a^2+1}{4a}\right)^2$$

また，直線 BC の方程式は　$y=\dfrac{1}{a}x-1$

これらを連立させると

$$x^2-\frac{a^2+1}{2a}x+\frac{1}{a^2}x^2-\frac{2}{a}x+1=0$$

$$2(a^2+1)x^2-(a^2+5)x+2a=0$$

$$(2x-1)\{(a^2+1)x-2\}=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{a}{2},\ \frac{2}{a^2+1}$$

別解１　(2)の $O_2$ の中心は，次のように求めることもできる.

(2)　2 直線AC，BC のなす角の二等分線は $y=0$ または $x=a$ であり，$O_2$ の中心が第一象限にあることから，直線 $x=a$ 上に存在する．よって，中心は $(a,\ b)\ (b>0)$ とおける.

$O_2$ は直線 AB，すなわち $y$ 軸と接することから，半径は $a$ である.

また，$O_2$ が直線 BC： $x-ay-a=0$ と接するから　$\dfrac{|-ab|}{\sqrt{a^2+1}}=a$

$a>0$，$b>0$ であるから　$b=\sqrt{a^2+1}$

よって，$O_2$ の中心の座標は　$\left(a,\ \sqrt{a^2+1}\right)$

別解１終わり

別解２　(5)の最小値は，式変形を工夫すれば，相加・相乗平均の不等式で求めることもできる.

$5a^2+1=t$ とおくと，$a>0$ より $t>1$ であり　$a^2=\dfrac{1}{5}(t-1)$

これにより，接点の $y$ 座標について

$$\sqrt{\frac{\left\{\frac{1}{5}(t-1)+1\right\}^3}{t^2}}=\frac{1}{5\sqrt{5}}\sqrt{\frac{(t+4)^3}{t^2}}=\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{\left(\frac{t+4}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^3}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{\left(t^{\frac{1}{3}}+4t^{-\frac{2}{3}}\right)^3}=\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}t^{\frac{1}{3}}+4t^{-\frac{2}{3}}\right)^3}$$

$$\geqq\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{\left\{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}t^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{2}t^{\frac{1}{3}}\cdot 4t^{-\frac{2}{3}}}\right\}^3}=\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{3^3}=\frac{3\sqrt{15}}{25}$$

等号が成り立つのは　$\dfrac{1}{2}t^{\frac{1}{3}}=4t^{-\frac{2}{3}}$　　$\therefore\quad t=8$

このとき　$5a^2+1=8$　　$\therefore\quad a=\dfrac{\sqrt{35}}{5}$

よって，$a=\dfrac{\sqrt{35}}{5}$ のとき，最小値 $\dfrac{3\sqrt{15}}{25}$ をとる.

別解２終わり