解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2022年度 日本大学（N方式）

【 講 評 】

例年のN方式同様，大問6題で出題された．［Ⅰ］はやや易レベルの小問集合，［Ⅱ］，［Ⅲ］は易レベルの大問，［Ⅳ］，［Ⅴ］，［Ⅵ］は標準レベルの大問という構成であった．いずれも典型問題であり，解法に困るような問題はなかったが，試験時間に対する分量が多いため，止まって考える時間はない．公式の暗記量や計算力が勝負を分けるだろう．要領よく得点を積み重ね，7割以上の得点をしたい．

【 解 答 】

［Ⅰ］小問集合【やや易】

$\boxed{1}$：−，　$\boxed{2}$：1，　$\boxed{3}$：0，　$\boxed{4}$：1，　$\boxed{5}$：3，　$\boxed{6}$：5，　$\boxed{7}$：1，

$\boxed{8}$：2，　$\boxed{9}$：6，　$\boxed{10}$：1，　$\boxed{11}$：0，　$\boxed{12}$：0，　$\boxed{13}$：8，

［Ⅱ］確率【易】

$\boxed{14}$：1，　$\boxed{15}$：6，　$\boxed{16}$：4，　$\boxed{17}$：2，　$\boxed{18}$：1，　$\boxed{19}$：1，　$\boxed{20}$：2，　$\boxed{21}$：8，

［Ⅲ］図形と計量（数Ⅰ）／三角関数（数Ⅱ）【易】

$\boxed{22}$：1，　$\boxed{23}$：4，　$\boxed{24}$：−，　$\boxed{25}$：7，　$\boxed{26}$：8，　$\boxed{27}$：8，　$\boxed{28}$：8，

$\boxed{29}$：1，　$\boxed{30}$：1，　$\boxed{31}$：7，　$\boxed{32}$：3，　$\boxed{33}$：2，

［Ⅳ］ベクトル（数学B）【標準】

$\boxed{34}$：2，　$\boxed{35}$：2，　$\boxed{36}$：5，　$\boxed{37}$：1，　$\boxed{38}$：4，　$\boxed{39}$：5，　$\boxed{40}$：2，　$\boxed{41}$：1，

$\boxed{42}$：6，　$\boxed{43}$：2，　$\boxed{44}$：5，

［Ⅴ］数列の極限（数学Ⅲ）【標準】

$\boxed{45}$：2，　$\boxed{46}$：9，　$\boxed{47}$：9，　$\boxed{48}$：7，　$\boxed{49}$：2，　$\boxed{50}$：9，　$\boxed{51}$：2，　$\boxed{52}$：2，

$\boxed{53}$：6，　$\boxed{54}$：4，　$\boxed{55}$：2，　$\boxed{56}$：1，　$\boxed{57}$：4

［Ⅵ］微分法・積分法（数学Ⅲ）【標準】

$\boxed{58}$：1，　$\boxed{59}$：1，　$\boxed{60}$：2，　$\boxed{61}$：1，　$\boxed{62}$：0，　$\boxed{63}$：0，　$\boxed{64}$：1，　$\boxed{65}$：4，

$\boxed{66}$：3，　$\boxed{67}$：4，

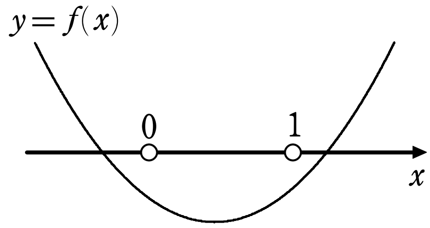
【　解　説　】

［1］

(1)　$f(x)=a^2x^2-3ax+2a-2$ とおく．

2 次方程式 $f(x)=0$ が $x<0$ と $1<x$ の範囲に実数解を 1 つずつ持つとき

$$\begin{cases} f(0)=2a-2<0 & \cdots\cdots① \\ f(1)=a^2-a-2<0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$



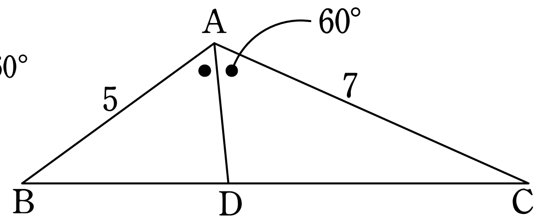
① より　$a<1$

② より　$(a-2)(a+1)<0$　　$\therefore$　$-1<a<2$

これらの共通部分を考えると，$a\neq 0$ であるから，

$$-1<a<0,\quad 0<a<1$$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}$ であるから



$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \mathrm{AD}\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 7\cdot \mathrm{AD}\cdot\sin 60^\circ$$

$35=12\mathrm{AD}$　　$\therefore$　$\mathrm{AD}=\dfrac{35}{12}$

$\boxed{別解1}$　角の二等分線の定理と余弦定理を用いてもよい

$\triangle\mathrm{ABD}$，$\triangle\mathrm{ACD}$ に余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}^2+5^2-2\cdot\mathrm{AD}\cdot 5\cdot\cos 60^\circ=\mathrm{AD}^2-5\mathrm{AD}+25$$

$$\mathrm{CD}^2=\mathrm{AD}^2+7^2-2\cdot\mathrm{AD}\cdot 7\cdot\cos 60^\circ=\mathrm{AD}^2-7\mathrm{AD}+49$$

また，角の二等分線の定理により

$$\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=5:7\qquad\therefore\quad \mathrm{BD}^2:\mathrm{CD}^2=25:49$$

よって　$\mathrm{AD}^2-5\mathrm{AD}+25:\mathrm{AD}^2-7\mathrm{AD}+49=25:49$

$$49(\mathrm{AD}^2-5\mathrm{AD}+25)=25(\mathrm{AD}^2-7\mathrm{AD}+49)$$

$$\mathrm{AD}(12\mathrm{AD}-35)=0$$

$\mathrm{AD}>0$ であるから　$\mathrm{AD}=\dfrac{35}{12}$

$\boxed{別解1}$終わり

$\boxed{別解2}$　以下の公式を用いてもよい．

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と BC の交点を D とすると，

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BC}}$$

が成り立つ．これを用いる．

$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を用いると

$$\mathrm{BC}^2=5^2+7^2-2\cdot 5\cdot 7\cdot\cos 120^\circ=109\qquad\therefore\quad \mathrm{BC}=\sqrt{109}$$

$\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=5:7$ より　$\mathrm{BD}=\dfrac{5}{12}\sqrt{109}$，$\mathrm{CD}=\dfrac{7}{12}\sqrt{109}$

よって，上の公式を用いると

$$\mathrm{AD}=\sqrt{5\cdot 7-\frac{5}{12}\sqrt{109}\cdot\frac{7}{12}\sqrt{109}}=\sqrt{\frac{5\cdot 7}{12^2}(144-109)}=\frac{35}{12}$$

$\boxed{別解2}$終わり

(3)　布を n 枚重ねたとき，通過する光の量が 1 %以下になるとすると

$$\left(\frac{40}{100}\right)^n \leqq \frac{1}{100} \qquad \therefore \quad \left(\frac{2^2}{10}\right)^n \leqq 10^{-2}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{2^2}{10}\right)^n \leqq \log_{10} 10^{-2}$$

$$n(2\log_{10}2-1) \leqq -2$$

$$n\{2(0.3010)-1\} \leqq -2$$

$$n \geqq \frac{2}{0.398} = 5.025\cdots$$

よって布を 6 枚以上重ねればよい.

(4)　$x^{50} = x^2 \cdot x^{48} = x^2 \cdot (x^3)^{16} = x^2 \cdot \{(x^3-1)+1\}^{16}$

$$= x^2\{1 + {}_{16}\mathrm{C}_1(x^3-1) + {}_{16}\mathrm{C}_2(x^3-1)^2 + \cdots\cdots + (x^3-1)^{16}\}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{16} {}_{16}\mathrm{C}_k(x^3-1)^k$ は x^3-1 で割り切れるから，　x^{50} を x^3-1 で割った余りは

$$x^2 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \qquad \therefore \quad a=1,\quad b=0,\quad c=0$$

$\boxed{\text{別解}}$　割り算の恒等式と，$x^3=1$ の虚数解 ω を利用してもよい.

x^{50} を x^3-1 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，次の式が成り立つ.

$$x^{50} = (x^3-1)Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \cdots\cdots①$$

$x^3-1=0$ のとき　　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$$\therefore \quad x=1 \quad \text{または} \quad x^2+x+1=0 \quad \cdots\cdots②$$

② は虚数解をもつので，その 1 つを ω とすると，次の 2 式が成り立つ.

$$\omega^3 = 1 \quad \cdots\cdots③, \qquad \omega^2+\omega+1=0 \quad \cdots\cdots④$$

① に $x=1$ を代入すると　　$1 = a+b+c$　$\cdots\cdots⑤$

② に $x=\omega$ を代入すると　　$\omega^{50} = a\omega^2 + b\omega + c$

ここで ③，④ より　　$\omega^{50} = (\omega^3)^{16} \cdot \omega^2 = \omega^2 = -\omega-1$

また　　$a\omega^2 + b\omega + c = a(-\omega-1) + b\omega + c = (-a+b)\omega - a + c$

よって　　$-\omega-1 = (-a+b)\omega - a + c$　　$\therefore$　$(a-b-1)\omega = -a+c+1$

$a-b-1 \neq 0$ とすると　　$\omega = \dfrac{-a+c+1}{a-b-1}$

これは ω が虚数であることに反するから

$$\begin{cases} a-b-1=0 \\ -a+c+1=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} b=a-1 \\ c=a-1 \end{cases}$$

これらを ⑤ に代入すると　　$1 = a + (a-1) + (a-1)$　　$\therefore$　$a=1$

このとき　　$b=0$，　$c=0$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(5)　元のデータを x_1，x_2，x_3，……，x_n とすると，平均値が 3，分散が 2 であるから，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 3,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-3)^2 = 2 \quad \cdots\cdots①$$

新しいデータを $x_k' = 2x_k + 1$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$ とすると，平均が 7 であることと，

① より，x_k' の分散は

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k'-7)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{(2x_k+1)-7\}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2x_k-6)^2 = 4\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-3)^2$$

$$= 4\cdot 2 = 8$$

$\boxed{\text{補足}}$　データの変換公式は覚えておくとよい．

元のデータ x と新しいデータ x' に

$x' = ax + b$　(a，b は実数)

という関係があるとき，次の関係が成り立つ．

平均：$\overline{x'} = a\overline{x} + b$

分散：$s_{x'}{}^2 = a^2 s_x{}^2$

本問では $x' = 2x + 1$ が成り立つから

平均：$\overline{x'} = 2\overline{x} + 1 = 2\cdot 3 + 1 = 7$

分散：$s_{x'}{}^2 = 2^2\cdot s_x{}^2 = 2^2\cdot 2 = 8$

となる．

$\boxed{\text{補足}}$終わり

［Ⅱ］

4 回の球の取り出し方は 4^4 通りである．

(1)　$M-m=0$ となるのは，4 回とも同じ数字の球を取り出す 4 通りであるから，その確率は

$$\frac{4}{4^4}=\frac{1}{4^3}=\mathbf{\frac{1}{64}}$$

(2)　$M-m=1$ となるのは　　$(M,\ m)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3)$

$(M,\ m)=(2,\ 1)$ となるのは，4 回とも 1 または 2 の数字の球を取り出す場合のうち，

4 回とも 1 のみまたは 2 のみが出る場合を除いた場合であるから

$2^4-2=14$ 通り

$(M,\ m)=(3,\ 2)$，$(4,\ 3)$ の場合も同様であるから，求める確率は

$$\frac{3\times14}{4^4}=\mathbf{\frac{21}{128}}$$

別解　(2)は実際に取り出す場合を数え上げてもよい．

$M-m=1$ となるのは　　$(M,\ m)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3)$

$(M,\ m)=(2,\ 1)$ となるのは，4 回の出る数字が

$(1,\ 2,\ 2,\ 2)$ のとき　　$\dfrac{4!}{3!}=4$ 通り

$(1,\ 1,\ 2,\ 2)$ のとき　　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り

$(1,\ 1,\ 1,\ 2)$ のとき　　$\dfrac{4!}{3!}=4$ 通り

であるから　　$4+6+4=14$ 通り

これは $(M,\ m)=(3,\ 2)$，$(4,\ 3)$ のときも同様であるから，求める確率は

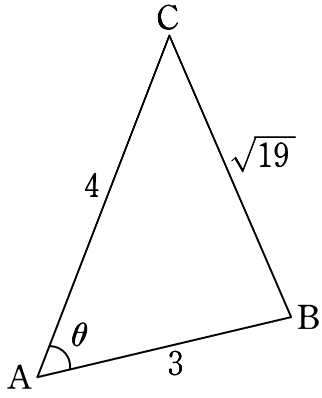
$$\frac{3\times14}{4^4}=\mathbf{\frac{21}{128}}$$

別解終わり

［Ⅲ］

(1)　△ABC に余弦定理を用いると　　$\cos\theta=\dfrac{3^2+4^2-(\sqrt{19})^2}{2\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{4}$

2 倍角の公式により　　$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-1=\mathbf{\dfrac{-7}{8}}$



(2)　2 倍角の公式を 2 回用いると

$$\begin{aligned}\cos4\theta&=2\cos^2 2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1\\&=8\cos^4\theta-8\cos\theta+1\end{aligned}$$

また，(1) の結果より

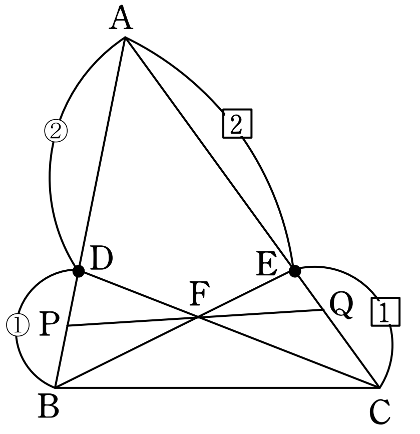
$$\cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2\left(-\frac{7}{8}\right)^2-1=\mathbf{\frac{17}{32}}$$

［IV］

(1)　△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}=\frac{3}{2}$$



よって　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{5}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)}{5}$

$$=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}\quad\cdots\cdots①$$

(2)　点 F が △ABC の外心であるとき　$|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BF}}|$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$$-2\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$ より　$-2\left(\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=0$

$$-4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+5|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=0\qquad\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$

(3)　点 F は直線 PQ 上にあるから，実数 t を用いて次のように表せる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+tq\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，①，② より

$$\begin{cases}\dfrac{2}{5}=(1-t)p\\[2mm]\dfrac{2}{5}=tq\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}1-t=\dfrac{2}{5p}\\[2mm]t=\dfrac{2}{5q}\end{cases}$$

2 式の和をとると　$1=\dfrac{2}{5p}+\dfrac{2}{5q}$　　$\therefore\quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{5}{2}\quad\cdots\cdots③$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より　$\triangle\mathrm{APQ}=pq\triangle\mathrm{ABC}=pq$

ここで ③ について，$p>0$，$q>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式により

$$\frac{5}{2}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}}=\frac{2}{\sqrt{pq}}\qquad\therefore\quad pq\geqq\frac{16}{25}$$

等号が成立するのは　$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{q}=\dfrac{5}{4}$　　$\therefore\quad p=q=\dfrac{4}{5}$

よって △APQ は，$p=q=\dfrac{4}{5}$ のとき，最小値 $\dfrac{16}{25}$ をとる．

$\boxed{\text{別解 1}}$ (1)はベクトル方程式を用いてもよい．

点 F は直線 BE 上にあるから，実数 t を用いて次のように表せる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots③$$

また，点 F は直線 CD 上にあるから，実数 s を用いて次のように表せる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{3}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots④$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，③，④ より

$$\begin{cases} 1-t=\dfrac{2}{3}(1-s) \\ \dfrac{2}{3}t=s \end{cases} \qquad \therefore \quad t=\frac{3}{5},\quad s=\frac{2}{5}$$

よって ③ に代入すると $\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$

$\boxed{\text{別解 1}}$終わり

$\boxed{\text{別解 2}}$ (2)は正射影を用いてもよい．

辺 AB の中点を M とする．

点 F が △ABC の外心であるとき，F からAB へ下ろした

垂線の足は M であるから $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

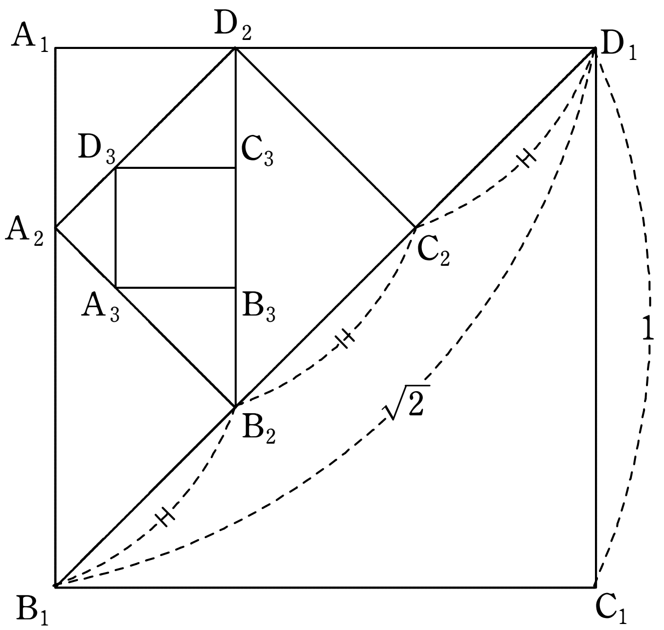
(1) より $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\dfrac{2}{5}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

よって $\quad \dfrac{2}{5}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{5}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$

$\boxed{\text{別解 2}}$終わり

［V］



(1)　四角形 $A_2B_2C_2D_2$ は正方形より，　$A_2B_2=B_2C_2=C_2D_2$

また，三角形 $A_2B_1B_2$，$C_2D_1D_2$ は直角二等辺三角形より　　$A_2B_2=B_1B_2$，$C_2D_2=C_2D_1$

これより，　$B_1B_2=B_2C_2=C_2D_1$ であるから，　$B_2C_2=\dfrac{B_1D_1}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

よって，正方形 $A_2B_2C_2D_2$ の面積 S_2 は　　$S_1=(B_2C_2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\mathbf{\dfrac{2}{9}}$

(2)　(1) より，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ と正方形 $A_2B_2C_2D_2$ の相似比は $1:\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ であるので，

面積比は　$1:\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=1:\dfrac{2}{9}$

よって，数列 $\{S_n\}$ は，初項 $S_1=1^1=1$，公比 $\dfrac{2}{9}$ の等比数列であるので，

$$\sum_{k=1}^{n} S_k=S_1\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1-\frac{2}{9}}=\mathbf{\frac{9}{7}\left\{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right\}}$$

(3)　三角形 $A_1A_2D_2$ の内接円の半径を r_1 とするとき，

$$\triangle A_1A_2D_2=\frac{r_1}{2}(A_1A_2+A_2D_2+A_1D_2)$$

$A_1A_2=\dfrac{A_2D_2}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$ より，

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{r_1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore r_1=\frac{1}{3(2+\sqrt{2})}=\mathbf{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}$$

次に，三角形 $A_1A_2D_2$ と三角形 $A_2A_3D_3$ の相似比は，

$$A_1D_1 : A_2D_2 = 1 : \frac{\sqrt{2}}{3}$$

よって，数列 $\{r_n\}$ は，初項 $r_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ ，公比 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ の等比数列である。

$\left|\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right|<1$ より，求める和は収束して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \frac{\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{3}{3-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{2}}{7} = \mathbf{\frac{4-\sqrt{2}}{14}}$$

$\boxed{\text{補足}}$

マーク式の問題であるため，「一般に，規則的につくる図形の辺の長さや面積は等比数列になる」ということを用いて解いている．記述式の場合，例えば(2)は正方形 $A_1B_1C_1D_1$ と正方形 $A_2B_2C_2D_2$ ではなく，正方形 $A_nB_nC_nD_n$ と正方形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ で相似比を考えて数列 $\{S_n\}$ の公比を求めるべきである．

$\boxed{\text{補足}}$終わり

$\boxed{\text{別解}}$ (3)の内接円の半径は，次のように求めることもできる．

［その１］

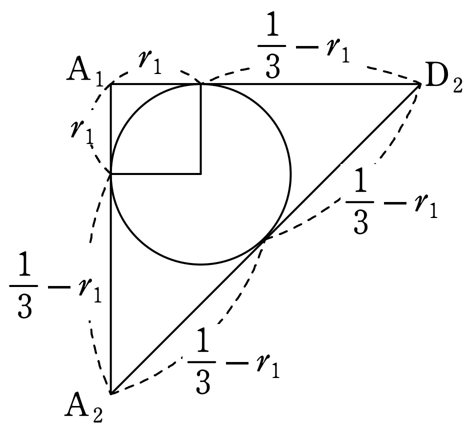
右図から，

$$A_2D_2=\left(\frac{1}{3}-r_1\right)+\left(\frac{1}{3}-r_1\right)=\frac{2}{3}-2r_1$$

$A_2D_2=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ であるから，

$$\frac{2}{3}-2r_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore\ r_1=\mathbf{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}$$



［その２］

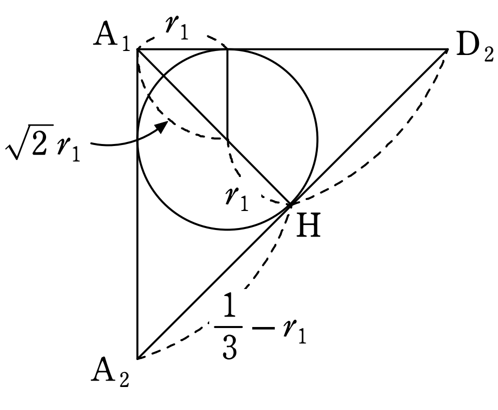
右の図のように， A_2D_2 の中点を H とすると，

$$A_1H=\sqrt{2}\,r_1+r_1=(\sqrt{2}+1)r_1$$

一方， $A_2H=\dfrac{A_1A_2}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ より，

$$(\sqrt{2}+1)r_1=\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\therefore r_1=\frac{1}{3(2+\sqrt{2})}=\mathbf{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}$$



$\boxed{\text{別解}}$終わり

［VI］

対数の真数は正であるから　　$x+1>0$　　$\therefore$　$x>-1$

(1)　$f(x)=x\log(x+1)$ より

$$f'(x)=1\cdot\log(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}=\log(x+1)+\frac{(x+1)-1}{x+1}$$

$$=\log(x+1)-\frac{1}{x+1}+1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

(2)　$y=f(x)$ と $y=x$ を連立させて　　$x\log(x+1)=x$

$x\{\log(x+1)-1\}=0$

$\therefore$　$x=0$　または　$\log(x+1)=1$

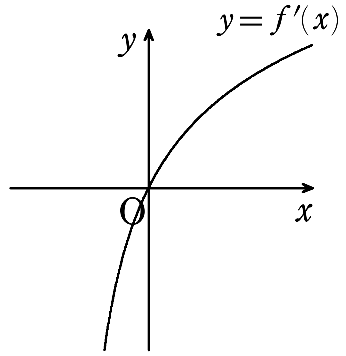
$\log(x+1)=1$ より　　$x+1=e$　　$\therefore$　$x=e-1$

a は原点と異なる交点の x 座標であるから，$a\neq 0$ より　　$a=e-1$

$x>-1$ のとき，(1) より　　$f''(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}>0$

よって，$f'(x)$ は $x>-1$ において単調に増加する．

また，$f'(0)=0$ であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．



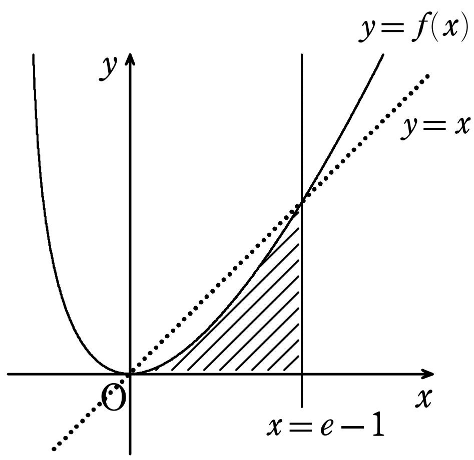
x	-1		0	
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘		↗

よって，$f(x)$ は $x=0$ において最小値 $f(0)=0$ をとる．

上の増減表と，

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

より，求める面積は右の図の斜線部分であるから



$$\int_0^{e-1} x\log(x+1)\,dx$$

$$=\int_0^{e-1}\left\{\frac{1}{2}(x^2-1)\right\}'\cdot\ \log(x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)\right]_0^{e-1}-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\{(e-1)^2-1\}-\frac{1}{4}\Big[(x-1)^2\Big]_0^{e-1}$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-2e)-\frac{1}{4}\{(e-2)^2-1\}$$

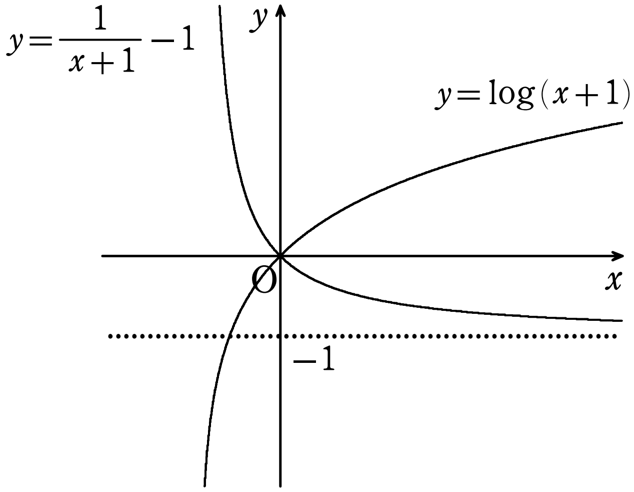
$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}$$

$\boxed{\text{別解}}$　$f(x)$ の増減は次のように調べてもよい．

$$f'(x)=\log(1+x)-\frac{1}{x+1}+1=\log(x+1)-\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$$

$y=\log(x+1)$ と $y=\dfrac{1}{x+1}-1$ のグラフは下の図のようになるから，これらの上下関係から，

$f'(x)$ の符号および $f(x)$ の増減は次のようになる．



x	-1		0	
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↘		↗

$\boxed{\text{別解}}$終わり

$\boxed{\text{補足}}$　面積を求める際の定積分で，工夫せずに部分積分法を用いると，次のようになる．

$$\int_0^{e-1} x\log(x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\log(x+1)\right]_0^{e-1}-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}\frac{x^2}{x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}\frac{(x^2-1)+1}{x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x-1)^2+\log(x+1)\right]_0^{e-1}$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{4}(e-2)^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}$$

$\boxed{\text{補足}}$終わり