解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2022 年度　東海大学（２／３）

【　講　評　】

例年通りの形式で出題された．以下，大問ごとに述べる．

$\boxed{1}$　例年通りの小問集合であった．いずれも典型問題で，計算が煩雑なものも少ないため，確実に得点したい．(6)は等式を満たす関数の次数が決定できないと厳しい．ここで差がつくだろう．

$\boxed{2}$　約数の逆数の和に関する問題であった．(1)(2)は確実に得点したい．(3)は a が素数であることが見抜ければ容易である．(4)(5)は，右辺の分数の形から，a が分母の倍数になっていることが把握できるかどうかがポイントである．本学で頻出である考察力の必要な問題．解答根拠が希薄であっても，なんとか空欄を埋め，(3)までは得点したい．

$\boxed{3}$　微分法（極値，変曲点，方程式），逆関数，積分法（面積，体積）と典型問題であったが，解法の選択を誤ると計算が多くなる．この問題の出来が，合否に大きく響くだろう．

全体の難易度，分量を考慮すると，全体で７割弱の得点が目標である．

【　解　答　】

$\boxed{1}$　小問集合【やや易】

ア：$-\dfrac{7}{25}$,　イ：15,　ウ：$-\dfrac{1}{4}<k<0$,　エ：8,　オ：5,　カ：11,　キ：4,

ク：$\dfrac{15}{2}$,　ケ：x^2+3x+5

$\boxed{2}$　整数の性質（数 A）／数列（数 B）【標準】

ア：2,　イ：$\dfrac{403}{125}$,　ウ：$2-\dfrac{1}{2^n}$,　エ：$\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)\left(3-\dfrac{1}{3^n}\right)$,

オ：293,　カ：$\dfrac{294}{293}$,　キ：174,　ク：812,　ケ：1144

$\boxed{3}$　微分法・積分法（数学Ⅲ）【標準】

ア：$e^{\frac{1}{2}}$,　イ：$-\dfrac{1}{4}$,　ウ：$e^{\frac{3}{2}}$,　エ：$\dfrac{3}{4}$,　オ：$3-e$,

カ：$0<k<(2+\sqrt{5})e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$,　キ：$e^3$,　ク：$\dfrac{e^3}{5}$,　ケ：$\pi(2e^6+3e^{-4})$

【　解　説　】

$\boxed{1}$

(1)　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=9+14t+25t^2$

$$=25\left(t+\frac{7}{25}\right)^2+\frac{176}{25}$$

t はすべての実数をとるから，$t=-\dfrac{7}{25}$ のとき最小となる．

$\boxed{\text{別解}}$　図形的に最小値を求めることもできる．

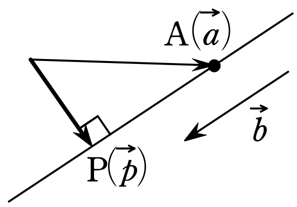
$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とすると，点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り $\vec{b}$ と平行な直線上の点である．

$|\vec{p}|$ が最小となるのは，$\vec{p}\perp\vec{b}$ となるときであるから　　$\vec{p}\cdot\vec{b}=0$

よって　　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$7+25t=0$　　　$\therefore$　$t=-\dfrac{7}{25}$



$\boxed{\text{別解}}$終わり

(2)　A に a 冊，B に b 冊，C に c 冊分けあたえるとすると，どの人にも少なくとも 1 冊はあたえるから

$a+b+c=7$，$a\geqq1$，$b\geqq1$，$c\geqq1$

$\therefore$　$(a-1)+(b-1)+(c-1)=4$，$a-1\geqq0$，$b-1\geqq0$，$c-1\geqq0$

これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は，異なる 3 種類のものから，重複を許して 4 個選ぶときの場合の数に等しいから

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$ 通り

(3)　$\sin^2x+\sin x=k$ ……①　とおく．

$\sin x=t$ とおくと ① は　　$k=t^2+t=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$　……②

$0\leqq x<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq1$ であり，1 つの t に対する x の個数は

$-1<t<1$ のとき 2 個,

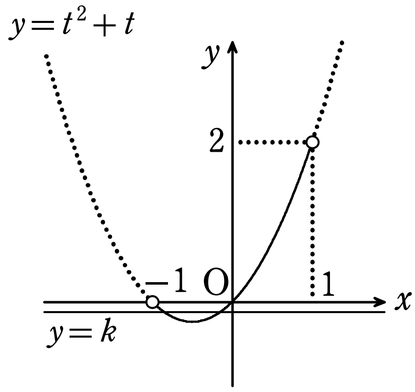
$t=\pm1$ のとき 1 個

である．

よって，方程式 ① が相異なる 4 個の解をもつのは，t の方程式 ② が $-1<t<1$ の範囲で相異なる 2 個の解をもつときである．

よって，直線 $y=k$ と放物線 $y=t^2+t$ が $-1<t<1$ の範囲において 2 点で交わるときを考えると，

$$-\frac{1}{4}<k<0$$



(4)　$n+(n+1)+(n+2)+\cdots\cdots+(n+k-1)=\dfrac{1}{2}\{n+(n+k-1)\}\cdot k$

$=\dfrac{1}{2}k(2n+k-1)$

よって　$\dfrac{1}{2}k(2n+k-1)=50$　$\therefore$　$k(2n+k-1)=2^2\cdot 5^2$　……①

ここで $k\geqq 2$，$n\geqq 1$ より　$2n+k-1\geqq 3$，$2n+k-1>k$

また　$2n+k-1-k=2n-1$

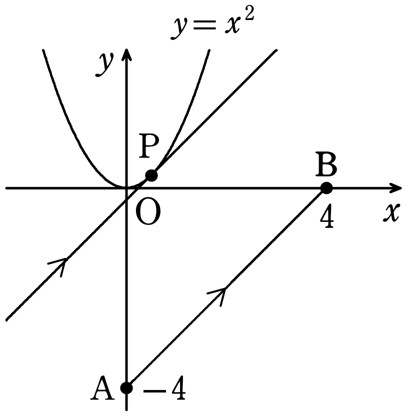
より，2 数の差が奇数となるから，$2n+k-1$ と k の偶奇は異なる．

よって，① を満たすのは

$(k,\ 2n+k-1)=(2^2,\ 5^2)$，$(5,\ 2^2\cdot 5)$

$\therefore$　$(n,\ k)=$**(8，5)**，**(11，4)**

(5)　△PAB の面積が最小となるのは，点 P における接線が，直線 AB と平行になるときである．



$y=x^2$ より　$y'=2x$

直線 AB の傾きは $\dfrac{0-(-4)}{4-0}=1$ であるから

$2x=1$　$\therefore$　$x=\dfrac{1}{2}$

このとき，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

よって，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ のとき，△PAB の面積は最小となる．

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{17}{4}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$ であるから，△PAB の面積の最小値は

$$\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{17}{4}\right)\cdot\frac{7}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{120}{8}\right|=\mathbf{\frac{15}{2}}$$

$\boxed{\text{別解}}$　△PAB の面積を，2 次関数で表してもよい．

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とおく．

点 P と直線 AB：$x-y-4=0$ との距離は　$\dfrac{|t-t^2-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|t^2-t+4|}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{AB}=4\sqrt{2}$ であるから，△PAB の面積について

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{|t^2-t+4|}{\sqrt{2}}\cdot 4\sqrt{2}=2|t^2-t+4|=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{2}$$

よって，t はすべての実数をとるから，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\mathbf{\dfrac{15}{2}}$ をとる．

$\boxed{\text{別解}}$終わり

(6)　$f(x)$ が n 次の整式 $(n \geqq 3)$ であるとき，$f'(x)$ は $n-1\,(\geqq 2)$ 次の整式であるから，

$f'(x)\left\{f'(x)-\dfrac{2}{3}x\right\}$ は $2(n-1)$ 次の整式,

$f(x)+\dfrac{9}{2}x+4$ は n 次の整式,

となるので

$$2(n-2)=n \qquad \therefore \quad n=2$$

これは $n \geqq 3$ を満たさないので不適である.

よって，$f(x)$ は 2 次以下の整式であり，$f(0)=5$ であるから

$$f(x)=px^2+qx+5$$

とおける.

$f'(x)=2px+q$ であるから，

$$(\text{左辺})=(2px+q)\left\{(2px+q)-\frac{3}{2}x\right\}=(4p^2-3p)x^2+\left(4p-\frac{3}{2}\right)qx+q^2$$

$$(\text{右辺})=px^2+qx+5+\frac{9}{2}x+4=px^2+\left(q+\frac{9}{2}\right)x+9$$

よって，$\begin{cases} 4p^2-3p=p & \cdots\cdots① \\ \left(4p-\dfrac{3}{2}\right)q=q+\dfrac{9}{2} & \cdots\cdots② \\ q^2=9 & \cdots\cdots③ \end{cases}$

① より　$p(p-1)=0 \qquad \therefore \quad p=0,\ 1$

$p=0$ のとき，② より　$-\dfrac{3}{2}q=q+\dfrac{9}{2} \qquad \therefore \quad q=-\dfrac{9}{5}$

これは ③ を満たさないので不適である.

$p=1$ のとき，② より　$\left(4-\dfrac{3}{2}\right)q=q+\dfrac{9}{2} \qquad \therefore \quad q=3$

これは ③ を満たす.

よって，$p=1$，$q=3$ より　$f(x)=\boldsymbol{x^2+3x+5}$

$\boxed{2}$

整数 a の正の約数の総和を $g(a)$ とすると $f(a)=\dfrac{g(a)}{a}$ である.

(1)　$28=2^2\cdot 7$ より　　$g(28)=(2^0+2^1+2^2)(7^0+7^1)=7\cdot 8=56$

よって　　$f(28)=\dfrac{g(28)}{28}=\dfrac{56}{28}=\mathbf{2}$

また，$6000=2^4\cdot 3\cdot 5^3$ より　　$g(6000)=(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)(3^0+3^1)(5^0+5^1+5^2+5^3)$

$$=\frac{2^5-1}{2-1}\cdot 4\cdot \frac{5^4-1}{5-1}=31\cdot 4\cdot 156$$

よって　　$f(6000)=\dfrac{g(6000)}{6000}=\dfrac{31\cdot 4\cdot 156}{2^4\cdot 3\cdot 5^3}=\dfrac{31\cdot 13}{5^3}=\mathbf{\dfrac{403}{125}}$

(2)　$g(2^n)=2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^n=\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$ であるから

$$f(2^n)=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\mathbf{2-\frac{1}{2^n}}$$

また，$6^n=2^n3^n$ より　　$g(6^n)=(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^n)(3^0+3^1+3^2+\cdots\cdots+3^n)$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)$$

よって　　$f(6^n)=\dfrac{g(6^n)}{6^n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)}{2^n\cdot 3^n}=\mathbf{\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)\left(3-\dfrac{1}{3^n}\right)}$

(3)　$a=pq$ (p，q は互いに素な整数) であるとき，$g(pq)=g(p)g(q)$ が成り立つから

$$f(pq)=\frac{g(pq)}{pq}=\frac{g(p)g(q)}{pq}=f(p)f(q)$$

$f(q)\geqq 1+\dfrac{1}{q}>1$ であるから　　$f(pq)=f(p)f(q)>f(p)$

また，$a=p^n$ (p は素数，n は自然数) であるとき，

$$f(p^n)=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{p^n}>1+\frac{1}{p}=f(p)$$

よって，$f(a)$ が最小となるのは $a=p$ のときで，$2\leqq a\leqq 300$ にある最大の素数は 293 であるから，

$\mathbf{a=293}$のとき，最小値 $f(293)=1+\dfrac{1}{293}=\mathbf{\dfrac{294}{293}}$ をとる.

(4)　$f(a)=\dfrac{60}{29}$ となるとき　　$\dfrac{g(a)}{a}=\dfrac{60}{29}$　　$\therefore$　$29g(a)=60a$

29 と 60 は互いに素であるから，a は 29 の倍数であり，$a=29l$ (l は自然数) とおける.

このとき　　$f(a)=f(29l)=\dfrac{g(29l)}{29l}=\dfrac{g(29)g(l)}{29l}=\dfrac{30g(l)}{29l}$

$f(a)=\dfrac{60}{29}$ より　　$\dfrac{60}{29}=\dfrac{30g(l)}{29l}$　　$\therefore$　$\dfrac{g(l)}{l}=f(l)=2$

$f(6)=2$ と，(1) より $f(28)=2$ であるから，求める a の値は小さい順に

　$l=6$ のとき　　$a=29\cdot 6=\mathbf{174}$

　$l=28$ のとき　　$a=29\cdot 28=\mathbf{812}$

(5)　$f(a)=\dfrac{315}{143}$ のとき　$\dfrac{g(a)}{a}=\dfrac{315}{143}$　　$\therefore$　$143g(a)=315a$

143 と 315 は互いに素であるから，a は 143 の倍数であり，$a=143m$ とおける．

$$f(143m)=\frac{g(143m)}{143m}=\frac{g(11\cdot13\cdot m)}{143m}=\frac{(1+11)(1+13)}{143}\frac{g(m)}{m}=\frac{168}{143}f(m)$$

よって，$f(a)=\dfrac{315}{143}$ となるとき　$\dfrac{168}{143}f(m)=\dfrac{315}{143}$　　$\therefore$　$f(m)=\dfrac{15}{8}$　……①

このとき m は 8 の倍数であり　$f(8)=\dfrac{g(8)}{8}=\dfrac{2^0+2^1+2^2+2^3}{8}=\dfrac{15}{8}$

したがって，① を満たすから，$f(a)=\dfrac{315}{143}$ を満たす最小の自然数は　$a=315\cdot8=1144$

$\boxed{\text{参考}}$　(4)について

$f(l)=\dfrac{g(a)}{a}=2$，$a=2g(a)$ を満たす整数を完全数といい，小さい順に

6，28，496，8128，……

である．これを覚えておくと容易に解答することができる．

$\boxed{3}$

(1)　$f(x)=(\log x)^2-\log x$ より　　$f'(x)=\dfrac{2\log x}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\log x-1}{x}$

$f'(x)=0$ となるとき　　$\log x=\dfrac{1}{2}$　　　$\therefore$　$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

また　$f''(x)=\dfrac{\dfrac{2}{x}\cdot x-(2\log x-1)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{3-2\log x}{x^2}$

$f''(x)=0$ となるとき　　$\log x=\dfrac{3}{2}$　　　$\therefore$　$x=e^{\frac{3}{2}}$

関数 $f(x)$ の $x>0$ における増減，曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる．

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$e^{\frac{3}{2}}$	
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	/	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	/	↘		↗		↗

$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$，$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$ であるから，

$f(x)$ は $x=e^{\frac{1}{2}}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{4}$ をとる．

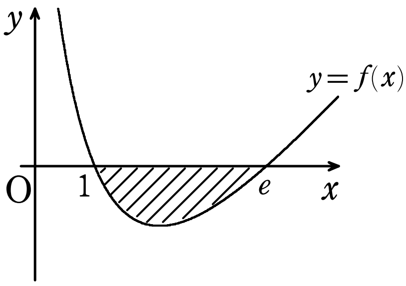
また，C の変曲点の座標は $\left(e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{4}\right)$ である．

(2)　$f(x)=\log x(\log x-1)$ より

$0\leqq\log x\leqq 1$，つまり $1\leqq x\leqq e$ のとき $f(x)\leqq 0$，

$\log x\leqq 0$，$1\leqq \log x$，つまり $x\leqq 1$，$e\leqq x$ のとき $f(x)\geqq 0$

であるから，求める面積を S とすると



$$S=\int_1^e -f(x)\,dx=\int_1^e\{\log x-(\log x)^2\}\,dx$$

ここで，C，C' を積分定数とすると

$$\int\{\log x-(\log x)^2\}\,dx=\int\log x\,dx-\left\{x(\log x)^2-\int x\cdot\frac{2\log x}{x}\,dx\right\}$$

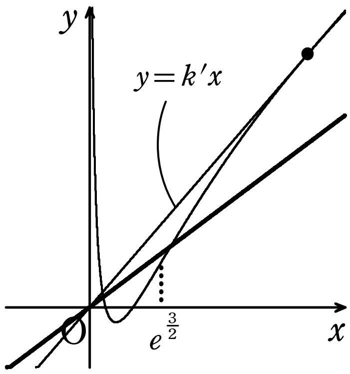
$$=3\int\log x-x(\log x)^2$$

$$=3x\log x-3x-x(\log x)^2+C$$

であるから

$$S=\Big[3x\log x-3x-x(\log x)^2\Big]_1^e=3e-3e-e+3=3-e$$

(3)　$f(x)=kx$ が相異なる 3 つの実数解をもつのは，



曲線 C : $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ が 3 つの共有点をもつときである．

$y=kx$ は原点を通る直線であり，曲線 C : $y=f(x)$ は $x>e^{\frac{3}{2}}$ において上に凸であるから，この範囲で $y=kx$ が接するときを $y=mx$ とすると，右の図より，求める k の値の範囲は $0<k<m$ である．

以下，m の値を求める．

$(t,\ f(t))$ における曲線 C の接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t) \qquad \therefore \quad y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$$

これが原点を通るとき　$-tf'(t)+f(t)=0$

$$(\log t)^2-3\log t+1=0$$

$$\log t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore \quad t=e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$$

接線の傾きについて

$$f'\left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)=\frac{2\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1}{e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}=(2+\sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}>0 \quad ,$$

$$f'\left(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)=\frac{2\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}-1}{e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}=(2-\sqrt{5})e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}<0$$

であるから　$m=(2+\sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

したがって，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{0<k<(2+\sqrt{5})e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}$

(4)　$y=g(x)$ は $y=f(x)$ の逆関数であるから，$t=g(6)$ とすると　$f(t)=6$

よって　$(\log t)^2-\log t-6=0$

$$(\log t-3)(\log t+2)=0$$

$$\log t=-2,\ 3 \qquad \therefore \quad t=e^{-2},\ e^3$$

$t\geqq e^{\frac{1}{2}}$ であるから　$\boldsymbol{t=g(6)=e^3}$

また，$y=g(x)$ より $x=f(y)$ が成り立つから

$$\frac{dx}{dy}=f'(y) \qquad \therefore \quad g'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$$

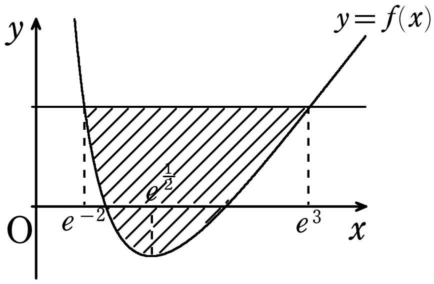
$g(6)=e^3$ であるから　$g'(6)=\dfrac{1}{f'(e^3)}=\dfrac{e^3}{2\cdot3-1}=\boldsymbol{\dfrac{e^3}{5}}$

(5)　$e^{-2} \leqq x \leqq e^{\frac{1}{2}}$ のとき　$y=f(x_1)$，

$e^{\frac{1}{2}} \leqq x \leqq e^3$ のとき　$y=f(x_2)$ とする．

求める体積を V とすると

$$V=\int_{-\frac{1}{4}}^{6} \pi {x_2}^2\,dy-\int_{-\frac{1}{4}}^{6} \pi {x_1}^2\,dy$$



ここで　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\log x-1}{x}$，

y	$-\frac{1}{4} \longrightarrow 6$
x_1	$e^{\frac{1}{2}} \longrightarrow e^{-2}$
x_2	$e^{\frac{1}{2}} \longrightarrow e^3$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^3} x^2 \cdot \frac{dy}{dx}\,dx-\pi\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{-2}} x^2 \cdot \frac{dy}{dx}\,dx$

$$=\pi\int_{e^{-2}}^{e^3} x^2 \cdot \frac{2\log x-1}{x}\,dx=\pi\int_{e^{-2}}^{e^3} x(2\log x-1)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[x^2(2\log x-1)\Big]_{e^{-2}}^{e^3}-\pi\int_{e^{-2}}^{e^3} x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}(5e^6+5e^{-4})-\frac{\pi}{2}\Big[x^2\Big]_{e^{-2}}^{e^3}$$

$$=\frac{\pi}{2}(5e^6+5e^{-4})-\frac{\pi}{2}(e^6-e^{-4})=\boldsymbol{\pi(2e^6+3e^{-4})}$$

$\boxed{\text{別解１}}$　(1)の最小値は，微分しなくても求められる．

$$f(x)=(\log x)^2-\log x=\left(\log x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$x>0$ のとき，$\log x$ はすべての実数をとるから，

$\log x=\dfrac{1}{2}$，すなわち $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$ **をとる．**

$\boxed{\text{別解１}}$終わり

$\boxed{\text{別解２}}$　(2)は定数分離によって求めてもよい．

$x>0$ であるから，$f(x)=kx$ より　$k=\dfrac{f(x)}{x}$　$(=h(x)$ とおく$)$

$$h'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{\dfrac{2\log x-1}{x}\cdot x-\{(\log x)^2-\log x\}}{x^2}=-\frac{(\log x)^2-3\log x-1}{x^2}$$

$h'(x)=0$ のとき　$(\log x)^2-3\log x-1=0$

$$\log x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\qquad \therefore\quad x=e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$$

よって， $h(x)$ の増減は次のようになる．

x	0		$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$		$e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	
$h'(x)$	/	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	/	↘		↗		↘

$f'(\alpha)=0$ が成り立つとき， $(\log\alpha)^2=3\log\alpha-1$ が成り立つから

$$f(\alpha)=3\log\alpha-1-\log\alpha=2\log\alpha-1$$

$$\therefore\quad h(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{2\log\alpha-1}{\alpha}$$

これを用いると $\quad h\left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)=\dfrac{2\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-1}{e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}=(2+\sqrt{5})e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}>0$ ，

$$h\left(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)=\frac{2\cdot\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-1}{e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}=(2-\sqrt{5})e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}<0$$

また $\quad \displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)^2-\log x}{x}=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2-\log x}{x}=0$

求める k の値の範囲は， $y=g(x)$ と $y=k$ が 3 つの共有点をもつときであるから，

$$\boldsymbol{0<k<(2+\sqrt{5})e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}$$

$\boxed{\text{別解２}}$終わり

$\boxed{\text{別解３}}$ (5)の体積は，バームクーヘン分割で求めることもできる（計算上のメリットはあまりない）．

求める体積を V とすると $\quad V=2\pi\displaystyle\int_{e^{-2}}^{e^3}x\{6-f(x)\}\,dx=2\pi\int_{e^{-2}}^{e^3}\{6x-xf(x)\}\,dx$

ここで $\quad \displaystyle\int_{e^{-2}}^{e^3}6x\,dx=\Big[3x^2\Big]_{e^{-2}}^{e^3}=3(e^6-e^{-4})$ ，

また $\quad \displaystyle\int_{-e^{-2}}^{e^3}xf(x)\,dx=\int_{e^{-2}}^{e^3}x\{(\log x)^2-\log x\}\,dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\{(\log x)^2-\log x\}\right]_{e^{-2}}^{e^3}-\frac{1}{2}\int_{e^{-2}}^{e^3}x(2\log x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(6e^6-6e^{-4})-\frac{1}{4}\Big[x^2(2\log x-1)\Big]_{e^{-2}}^{e^3}+\frac{1}{2}\int_{e^{-2}}^{e^3}x\,dx$$

$$=3(e^6-e^{-4})-\frac{1}{4}(5e^6+5e^{-4})+\frac{1}{4}\Big[x^2\Big]_{e^{-2}}^{e^3}$$

$$=3(e^6-e^{-4})-\frac{5}{4}(e^6+e^{-4})+\frac{1}{4}(e^6-e^{-4})=2e^6-\frac{9}{2}e^{-4}$$

よって $\quad V=2\pi\left\{3(e^6-e^{-4})-\left(2e^6-\dfrac{9}{2}e^{-4}\right)\right\}=\pi(2e^6+3e^{-4})$

$\boxed{\text{別解３}}$終わり