解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2022 年度　東京医科大学

【　講　評　】

例年通り，大問 4 題がマーク形式で出題された．以下，大問ごとに述べる．

$\boxed{1}$ **小問集合【標準】**

(1)(3)は簡単な問題なので落とせない．(2)は正十二面体がどんな図形であるかがわかっていれば，正五角形の問題と同等であるが，図形がわからなかった人には厳しい問題である．(4)は類題を解いた経験があるかどうかで差がつくだろう．

$\boxed{2}$ **微分法・積分法（数Ⅲ）【やや易】**

速度，加速度，道のりに関する問題であった．公式がわかっていれば簡単な問題であるが，頻出でないテーマであるため，公式を忘れてしまい，手がつかなかった人も少なくないだろう．再確認しておきたい．

$\boxed{3}$ **確率（数学 A）【易】**

条件付き確率の問題であった．設定も単純で，計算量も少ないため，落とせない問題である．

$\boxed{4}$ **高次方程式（数学Ⅱ）【やや易】**

昨年に続き，4 次方程式の解に関する計算問題であった．解と係数の関係を用いるだけであるが，覚えていなかったために落としてしまった人も少なくないだろう．公式及び，公式の導出方法を再確認しておくと良いだろう．

昨年度と比較して，全体的な難易度はやや低くなった．7 割 5 分の得点が目標である．

【　解　答　】

$\boxed{1}$

ア：3,　イ：8,　ウ：5,　エ：8,　オ：2,　カ：1,　キ：2,　ク：－,
ケ：1,　コ：2,　サ：1,　シ：1,　ス：2,　セ：4,　ソ：7,　タ：7,
チ：6,　ツ：1,　テ：5

$\boxed{2}$

ア：4,　イ：4,　ウ：8,　エ：1,　オ：8,　カ：9,　キ：5,　ク：8,
ケ：1,　コ：3,　サ：5

$\boxed{3}$

ア：5,　イ：1,　ウ：2,　エ：1,　オ：3,　カ：1,　キ：7,　ク：2,
ケ：7,　コ：1,　サ：8

$\boxed{4}$

ア：1,　イ：8,　ウ：6,　エ：2,　オ：2,　カ：3,　キ：2

【　解　説　】

$\boxed{1}$

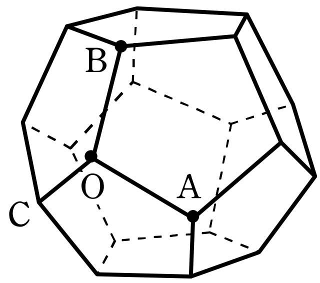
(1)　$(a,\ b)$ における接線の方程式は　　$\frac{a}{8}x+\frac{b}{3}y=1$

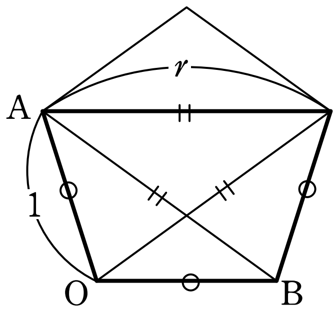
この接線の法線ベクトルは $\left(\frac{a}{8},\ \frac{b}{3}\right)$ であるから，求める直線の法線ベクトルは

$\left(\frac{b}{3},\ -\frac{a}{8}\right)$ である．よって，$(a,\ b)$ における法線の方程式は

$$\frac{b}{3}(x-a)+\left(-\frac{a}{8}\right)(y-b)=0 \qquad \therefore\quad bx-\frac{3}{8}ay=\frac{5}{8}ab$$

(2)





正十二面体は，12 個の正五角形で作られる多面体である．

3 点 A，O，B がこの順で頂点となる正五角形に注目し，トレミーの定理を用いると

$$r\times r=1\cdot r+1\cdot 1 \qquad \therefore\quad r^2=1+r$$

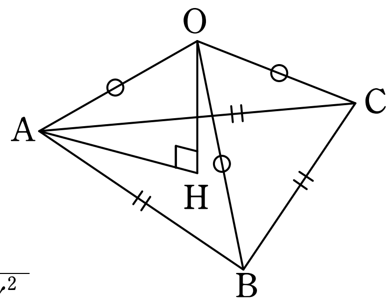
よって　　$r^2-2r+1=2-r$　　　$\therefore\quad (r-1)^2=2-r$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=r$ より　　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=r^2$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=r^2$$

$$2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=r^2 \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1-\frac{1}{2}r^2$$

よって $r^2=1+r$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1-\frac{1}{2}(1+r)=\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}r$



$\triangle$ABC は正三角形であるから，O から $\triangle$ABC へ下ろした垂線の足 H は，$\triangle$ABC の外心である．

よって，$\triangle$ABC に正弦定理を用いると

$$2\mathrm{AH}=\frac{r}{\sin 60^\circ} \qquad \therefore\quad \mathrm{AH}=\frac{r}{\sqrt{3}}$$

直角三角形 OAH に注目すると　　$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{1-\frac{r^2}{3}}$

したがって，四面体 OABC の体積は

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}r^2\sin 60^\circ\times\sqrt{1-\frac{r^2}{3}}=\frac{r^2}{12}\sqrt{3-r^2}$$

よって $r^2=1+r$ であるから

$$\frac{V}{r}=\frac{1}{12}\sqrt{r^2(3-r^2)}=\frac{1}{12}\sqrt{(1+r)(2-r)}=\frac{1}{12}\sqrt{-(r^2-r-1)+1}=\frac{1}{12}$$

(3)(a)　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9+7\tan|x|}\cos^2 x}$ とおくと，$f(-x)=f(x)$ が成り立つから

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{9+7\tan x}\cos^2 x}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{9+7\tan x}\cos^2 x}$$

$$=\frac{2}{7}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{7}{\cos^2 x}\right)(9+7\tan x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{2}{7}\Big[2(9+7\tan x)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{7}\left(16^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{2}}\right)=\mathbf{\frac{4}{7}}$$

(b)　$g(x)=\dfrac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}$ とおくと　$g(-x)=\dfrac{\sqrt{4+5\log|-x|}}{1-\sin(-x)}=\dfrac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1+\sin x}$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} g(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx$$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} g(x)\,dx$ において $x=-t$ とおくと，

$\dfrac{dx}{dt}=-1$，

x	$-\dfrac{\pi}{4}\longrightarrow 0$
t	$\dfrac{\pi}{4}\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} g(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} g(-t)\cdot(-1)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(-t)\,dt$

これを用いると

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(-x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{\sqrt{4+5\tan t}}{1+\sin t}+\frac{\sqrt{4+5\tan x}}{1-\sin x}\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\{(1-\sin x)+(1+\sin x)\}\sqrt{4+5\tan x}}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sqrt{4+5\tan x}}{\cos^2 x}\,dx=\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5}{\cos^2 x}(4+5\tan x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{4}{15}\Big[(4+5\tan x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4}{15}\left(9^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)=\mathbf{\frac{76}{15}}$$

$\boxed{2}$

点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4}t^4,\ \frac{\sqrt{3}}{5}t^5\right)$ における速度ベクトルを $\overrightarrow{v}$ ，加速度ベクトルを $\overrightarrow{\alpha}$ とすると，

$$\overrightarrow{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(t^3,\ \sqrt{3}\,t^4)$$

$$\overrightarrow{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(3t^2,\ 4\sqrt{3}\,t^3)$$

よって，点 P における速度 $\left|\overrightarrow{v}\right|$ と加速度 $\left|\overrightarrow{\alpha}\right|$ は，

$$\left|\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{(t^3)^2+(\sqrt{3}\,t^4)^2}=\sqrt{t^6+3t^8}=|t^3|\sqrt{1+3t^2}$$

$$\left|\overrightarrow{\alpha}\right|=\sqrt{(3t^2)^2+(4\sqrt{3}\,t^3)^2}=\sqrt{9t^4+48t^6}=t^2\sqrt{9+48t^2}$$

(1)　時刻 $t=4$ のとき，点 P の速さは

$$\left|\overrightarrow{v}\right|=4^3\sqrt{1+3\cdot4^2}=64\times7=\mathbf{448}$$

(2)　時刻 $t=3$ のとき，点 P における加速度の大きさは

$$\left|\overrightarrow{\alpha}\right|=3^2\sqrt{9+48\cdot3^2}=9\cdot3\cdot7=\mathbf{189}$$

(3)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=1$ までの点 P の道のりは，

$$\int_0^1\left|\overrightarrow{v}\right|dt=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^1 t^3\sqrt{1+3t^2}\,dt$$

ここで，$\displaystyle\int t\sqrt{1+3t^2}\,dt=\frac{1}{9}(1+3t^2)^{\frac{3}{2}}+C$ より，部分積分を用いると

$$\int t^3\sqrt{1+3t^2}\,dt=\int t^2\cdot t\sqrt{1+3t^2}\,dt=t^2\cdot\frac{1}{9}(1+3t^2)^{\frac{3}{2}}-\int 2t\cdot\frac{1}{9}(1+3t^2)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{9}t^2(1+3t^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{15}(1+3t^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{9\cdot15}(9t^2-2)(1+3t^2)^{\frac{3}{2}}$$

よって，　$\displaystyle\int_0^1\left|\overrightarrow{v}\right|dt=\left[\frac{1}{9\cdot15}(9t^2-2)(1+3t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{9\cdot15}(7\cdot8+2)=\mathbf{\frac{58}{135}}$

$\boxed{\text{別解}}$　(3)の定積分は，置換積分を用いてもよい．

$1+3t^2=u$ とおくと，$6tdt=du$　$\therefore\ dt=\frac{1}{6t}du$，

t	$0\ \to\ 1$
u	$1\ \to\ 4$

よって，

$$\int_0^1\left|\overrightarrow{v}\right|dt=\int_0^1 t^3\sqrt{1+3t^2}\,dt=\int_1^4 t\cdot\frac{u-1}{3}\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{1}{6t}du$$

$$=\frac{1}{18}\int_1^4(u\sqrt{u}-u)du$$

$$=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u}-\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{5}(32-1)-\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(8-1)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{31}{5}-\frac{7}{3}\right)=\mathbf{\frac{58}{135}}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

$\boxed{3}$

$P(A)$ は，試行 (ｉ) ではずれを 2 本引くときの確率であるから

$$P(A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{5}{12}$$

事象 B が起こると，試行 (ｉ) で当たりとはずれを 1 本ずつ引き，試行 (ⅱ) によって当たり 2 本，はずれ 4 本となる．この条件のもとで，試行 (ⅲ) で当たりくじを引く確率が $P_B(E)$ であるから，

$$P_B(E)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots①$$

$P(C\cap E)$ は，試行 (ｉ) で当たりを 2 本引き，試行 (ⅱ) によって当たり 1 本，はずれ 5 本となり，試行 (ⅲ) で当たりを引く確率であるから

$$P(C\cap E)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72} \quad \cdots\cdots②$$

$P(A\cap E)$ は，試行 (ｉ) ではずれを 2 本引き，試行 (ⅱ) によって当たり 3 本，はずれ 3 本となり，試行 (ⅲ) で当たりを引く確率であるから

$$P(A\cap E)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{24} \quad \cdots\cdots③$$

また，$P(B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{2}$ と ① より

$$P_B(E)=\frac{P(B\cap E)}{P(B)}=\frac{P(B\cap E)}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3} \qquad \therefore \quad P(B\cap E)=\frac{1}{6} \quad \cdots\cdots④$$

よって，②，③，④ より

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)=\frac{5}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{72}=\frac{7}{18}$$

$\boxed{4}$

$x^4-8x^3+cx^2+4x-6=0$ の 4 解が α, β, γ, δ のとき，4 次の解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=8 & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c & \cdots\cdots ② \\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-4 & \cdots\cdots ③ \\ \alpha\beta\gamma\delta=-6 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

$\alpha\beta=\sqrt{2}$ より，⑥ から

$$\gamma\delta=-3\sqrt{2} \qquad \therefore\ \gamma^2\delta^2=18$$

次に，③ を変形して ① などを用いると

$$\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=-4$$

$$\sqrt{2}(\gamma+\delta)-3\sqrt{2}\{8-(\gamma+\delta)\}=-4$$

$$\therefore\ \gamma+\delta=6-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また，① より $\alpha+\beta=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，② から

$$\begin{aligned} c&=\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)+\alpha\beta+\gamma\delta \\ &=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\alpha\beta+\gamma\delta \\ &=\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(6-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}-3\sqrt{2} \\ &=\frac{23}{2} \end{aligned}$$

参考　4 次方程式の解と係数の関係は，医学部入試でしばしば出てくるので，覚えておくとよい．

4 次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の 4 解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とするとき，

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-\dfrac{d}{a} \\ \alpha\beta\gamma\delta=\dfrac{e}{a} \end{cases}$$

が成り立つ．

参考終わり

$\boxed{\text{別解１}}$　相反方程式の解の対称性を用いて計算してもよい．

③，④ より　　$\alpha\beta=1$，$\gamma\delta=1 \iff \beta=\dfrac{1}{\alpha}$，　$\delta=\dfrac{1}{\gamma}$

また，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=A$，$\gamma+\dfrac{1}{\gamma}=B$ が成り立つから，

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+\frac{1}{\alpha}+\gamma+\frac{1}{\gamma}=A+B=-11$$

同様に計算すると

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2&=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+\gamma^2+\frac{1}{\gamma^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)^2-4\\&=A^2+B^2-4=(A+B)^2-2AB-4\\&=(-11)^2-2\cdot29-4=\mathbf{59}\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3&=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}+\gamma^3+\frac{1}{\gamma^3}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)^3-3\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)\\&=A^3+B^3-3(A+B)=(A+B)^3-3AB(A+B)-3(A+B)\\&=(-11)^3-3\cdot29\cdot(-11)-3\cdot(-11)=-11(121-87-3)=\mathbf{-341}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解１}}$終わり

$\boxed{\text{別解２}}$　４次方程式の解と係数の関係を用いてもよい．

４次方程式 (*) が４つの解 α，β，γ，δ を持つとき，次の式が成り立つ．

$$x^4+11x^3+31x^2+11x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

右辺を展開すると

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)&=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\{x^2-(\gamma+\delta)x+\gamma\delta\}\\&=x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2\\&\quad-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta\end{aligned}$$

となるから，両辺の各項の係数を比較すると

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=-11\\\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=31\\\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-11\\\alpha\beta\gamma\delta=1\end{cases}$$

これらを用いると　　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}=\dfrac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}=\dfrac{-11}{1}=\mathbf{-11}$

また　　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$

$$=(-11)^2-2\cdot31=\mathbf{59}$$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3$ もこれらを用いて求めることができるが，計算が煩雑になる．

$\boxed{\text{別解２}}$終わり