解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2022年度　東京慈恵会医科大学

【　講　評　】

昨年と同様の形式で出題された．頻出分野である確率，微分法・積分法［数Ⅲ］，整数の性質から出題され，難易度も下がったため，取り組みやすい試験であった．全体で6割5分程度を得点したい．以下，大問ごとに特徴を述べる．

１．確率［数学A］（標準）

玉の取り出し方に関する典型的な確率の問題である．試行回数も２回または３回なので，推移を書き出して把握してしまうとよい．確実に得点したい問題である．

２．微分法・積分法［数学Ⅲ］（やや易）

(1)は微分可能性の判定，(2)は最大・最小，(3)は x 軸回転体の体積と，典型的な微分法・積分法の問題であった．本学の入試問題としては易しいものなので，この問題は落とせない．

３．整数の性質［数学A］（標準）

整数の約数に関する証明問題であった．問題文の設定が理解できず，(1)でつまずいてしまった人も少なくないと思うが，(2)は典型的な倍数証明の問題であったので，こちらだけでも解いて部分点を稼いでおくことが大切である．

４．複素数平面［数学Ⅲ］／いろいろな曲線［数学Ⅲ］（標準）

複素数平面上の点の軌跡に関する問題であったが，複素数の問題としての要素は少なく，２次曲線の問題ととらえた方が適当であろう．特別難しい問題ではないが，極座標，直交座標，図形的処理と，様々な解法を用いることができるので，実力差のあらわれやすい問題であった．

【　解　答　】

１．ア：$\dfrac{59}{162}$，　イ：$\dfrac{25}{729}$

２．(1)　解説参照，　(2)　$a=1$，　(3)　$V=\pi(1-\log 2)$

３．(1)　$m={a_2}^2$　または　$m=a_2(a_2+2)$，　(2)　解説参照

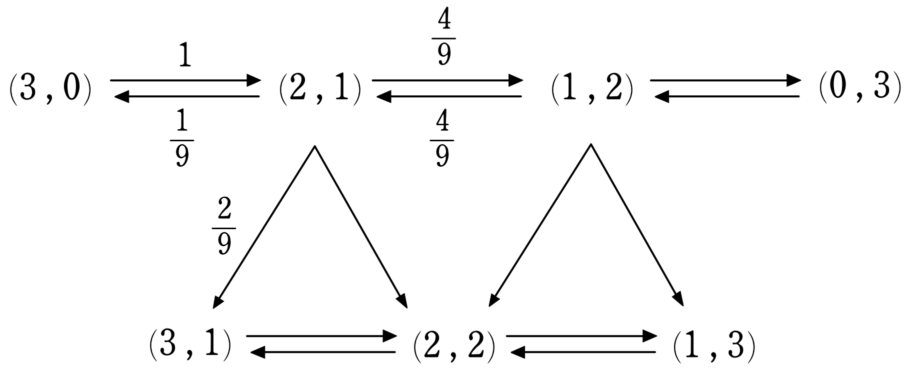
４．(1)　$\dfrac{u^2}{9}+v^2=1$，　(2)　実軸（u 軸）に平行な直線

【　解　説　】

１．

袋 A に入っている白玉の個数を a，赤玉の個数を b として，(a,b) で表す.

(a,b) の推移は，下の図のようになる.



図中の矢印には，この後の計算で用いる確率のみ書き込んでいる.

例えば，$(2,1)$ から $(1,2)$ に移動するのは，袋 A から白玉を取り出し袋 B から赤玉を取り出すときなので，$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$ である.

操作を 2 回繰り返した後に袋 A に入っている赤玉の個数が 1 個となるのは，赤玉の個数が次のように推移するときである.

(ｉ)　$(2,1)\to(3,0)\to(2,1)$ と推移するとき，この確率は $\dfrac{1}{9}\times1=\dfrac{1}{9}$

(ⅱ)　$(2,1)\to(1,2)\to(2,1)$ と推移するとき，この確率は $\dfrac{4}{9}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{16}{81}$

(ⅲ)　$(2,1)\to(2,2)\to(3,1)$ と推移するとき，この確率は $\dfrac{2}{9}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{18}$

したがって，求める確率は，

$$\frac{1}{9}+\frac{16}{81}+\frac{1}{18}=\mathbf{\frac{59}{162}}$$

また，操作を 3 回繰り返した後に袋 A に入っている赤玉の個数が 0 個となるのは，赤玉の個数が次のように推移するときである.

(ⅳ)　$(2,1)\to(3,0)\to(2,1)$ の後に $(3,0)$ に推移するとき

この確率は，(ｉ) の結果を利用すると，$\dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{81}$

(ｖ)　$(2,1)\to(1,2)\to(2,1)$ の後に $(3,0)$ に推移するとき

この確率は，(ⅱ) の結果を利用すると，$\dfrac{16}{81}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{16}{729}$

したがって，求める確率は，

$$\frac{1}{81}+\frac{16}{729}=\mathbf{\frac{25}{729}}$$

2．

(1)　$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+1}} & (x \geqq -a) \\ -\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+1}} & (x < -a) \end{cases}$　であるから

$$\lim_{x\to -a+0}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}=\lim_{x\to -a+0}\frac{\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}}{x+a}=\lim_{x\to -a+0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\lim_{x\to -a-0}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}=\lim_{x\to -a-0}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to -a+0}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} \neq \lim_{x\to -a-0}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}$

したがって，$f'(a)$ は存在しないから，$x=a$ において微分不可能である．

(2)　$x>-a$ のとき　$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x+a)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1-ax}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

$x<-a$ のとき　$f'(x)=-\dfrac{1-ax}{\sqrt{(x^2+1)^3}}<0$

よって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x		$-a$		$\frac{1}{a}$	
$f'(x)$	$-$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

ここで，$x\to\infty$ のとき $-a<x$，$x\to-\infty$ のとき $x<-a$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{a}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(x+a)}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{a}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$$

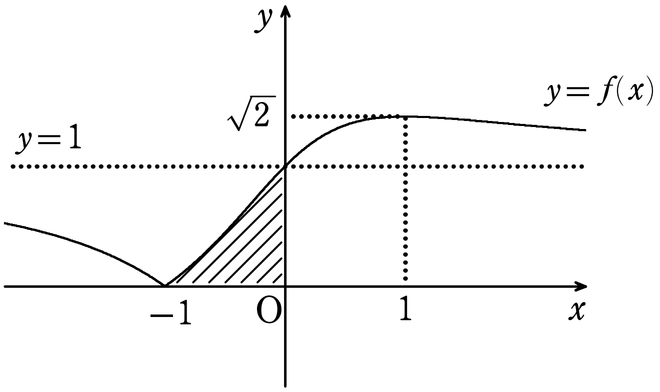
また　$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{a}+a}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+1}}=\dfrac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}>1$

よって，$f(x)$ は $x=a$ のとき，最大値 $\sqrt{a^2+1}$ をとる．

最大値が $\sqrt{2}$ となるとき　$\sqrt{a^2+1}=\sqrt{2}$　$\therefore$　$a^2=1$

$a>0$ より　$a=1$

(3)　(2) より，$a=1$ のときの$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



図の斜線部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積が V であるから，

$$V=\int_{-1}^{0}\pi\{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{0}\frac{(x^2+1)+2x}{x^2+1}\,dx=\pi\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\pi\Big[x+\log(x^2+1)\Big]_{-1}^{0}=\pi(\mathbf{1-\log 2})$$

$\boxed{\text{別解}}$　(2)の最大値は，式変形を工夫すれば，微分せずに求めることもできる．

$h>0$ とすると，$a>0$ より $-a<0$ であるから　　$(-a+h)^2<(-a-h)^2$

$$\frac{1}{\sqrt{(-a+h)^2+1}}>\frac{1}{\sqrt{(-a-h)^2+1}}$$

$$\therefore\quad f(-a+h)>f(-a-h)$$

よって，$f(x)$ は $x>-a$ において最大値をとる．

$h>0$ に対して　　$f(-a+h)=\dfrac{h}{\sqrt{(-a+h)^2+1}}=\sqrt{\dfrac{h^2}{(h-a)^2+1}}$

$$=\left(\frac{h^2-2ah+a^2+1}{h^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left\{(a^2+1)\frac{1}{h^2}-\frac{2a}{h}+1\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{(a^2+1)\left(\frac{1}{h}-\frac{a}{a^2+1}\right)^2+\frac{1}{a^2+1}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

したがって，$f(-a+h)$ は，$h=\dfrac{a}{a^2+1}$ のとき，最大値 $\sqrt{a^2+1}$ をとる．

（以下，本解と同じ．）

$\boxed{\text{別解}}$終わり

３．

(1)　$k=1$ のとき $m=1$ となり，$m \geqq 3$ であることから不適.

$k=2$ のとき m は素数となり，条件(ⅰ)から不適.

また $k \geqq 5$ のとき，条件(ⅱ)より $a_4-a_2 \leqq 3$ が成り立つ．一方，m が奇数であることから

その約数である a_2, a_3, a_4 もすべて奇数であり，$a_2<a_3<a_4$ と合わせると $a_4-a_2>4$ である.

よって，$k \geqq 5$ の場合も不適である.

以上より，$k=3, 4$　■

次に，$k=3$ のとき，m は素数の平方数であり，$a_1=1$，$a_2=\sqrt{m}$，$a_3=m$ となる.

よって，$m={a_2}^2$

$k=4$ のとき，m は 1 と m 以外の互いに素である 2 つの自然数 p, q の積であり，$p<q$ とすると

$a_1=1$，$a_2=p$，$a_3=q$，$a_4=m$ となる．また，条件(ⅱ)と a_2, a_3 が奇数であることから，

$q=p+2$ である.

よって，$m=pq=a_2(a_2+2)$

(2)　$k=3$ のとき，(1)より $m={a_2}^2$ である.

二項定理より，

$$\begin{aligned}(a_2n+1)^{a_2}-1 &= (a_2n)^{a_2}+{}_{a_2}\mathrm{C}_1(a_2n)^{a_2-1}+\cdots+{}_{a_2}\mathrm{C}_{a_2-2}(a_2n)^2+{}_{a_2}\mathrm{C}_{a_2-1}a_2n+1-1\\ &= (a_2n)^{a_2}+{}_{a_2}\mathrm{C}_1(a_2n)^{a_2-1}+\cdots+{}_{a_2}\mathrm{C}_{a_2-2}(a_2n)^2+{a_2}^2n\end{aligned}$$

一般に自然数 n, k に対して ${}_n\mathrm{C}_k$ は自然数より，これらの項はすべて $m={a_2}^2$ の倍数である.

よって，$(a_2n+1)^{a_2}$ も $m={a_2}^2$ の倍数となり，示せた.　■

4．

(1)　$|z|=1$ より $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけるから，

$$w=z+2z^{-1}=\cos\theta+i\sin\theta+2\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$
$$=3\cos\theta-i\sin\theta$$

$w=u+vi$ より　　$u=3\cos\theta$，$v=-\sin\theta$

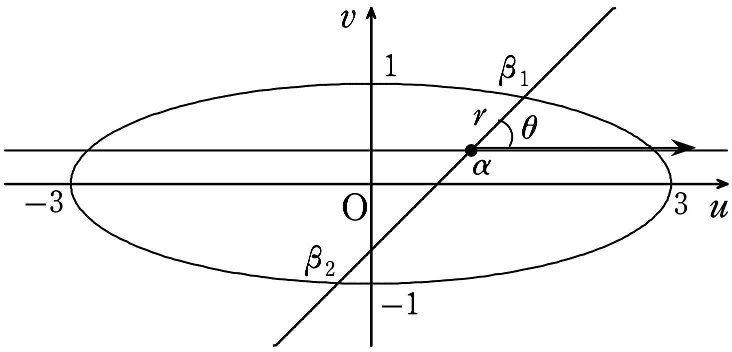
$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{u}{3},\quad \sin\theta=-v$$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ が成り立つから

$$\left(\frac{u}{3}\right)^2+(-v)^2=1 \qquad \therefore\quad \frac{u^2}{9}+v^2=1 \quad \cdots\cdots①$$

逆に，① を満たす任意の点 $w=u+vi$ は，u，v から z を構成することで，対応する z の存在がわかるので，C 上にある．よって，曲線 C と ① は一致する．

(2)



$\alpha=p+qi$ とする．

α を極とし，α を通り u 軸に平行で正方向へ伸びる半直線を始線とする極座標をとる．

曲線 ① 上の点を $(r,\ \theta)$ とおくと，$u=r\cos\theta+p$，$v=r\sin\theta+q$ が成り立つから，① より

$$\frac{(r\cos\theta+p)^2}{9}+(r\sin\theta+q)^2=1$$
$$(r\cos\theta+p)^2+9(r\sin\theta+q)^2=9$$
$$(r^2\cos^2\theta)+2pr\cos\theta+p^2+9r^2\sin^2\theta+18qr\sin\theta+9q^2=9$$
$$(1+8\sin^2\theta)r^2+2(p\cos\theta+9q\sin\theta)r+p^2+9q^2-9=0$$

この方程式の 2 解を r_1，r_2 とすると，解と係数の関係により

$$|\beta_1-\alpha||\beta_2-\alpha|=|r_1||r_2|=|r_1r_2|=\frac{|p^2+9q^2-9|}{1+8\sin^2\theta}$$

$\alpha=p+qi$ は曲線 ① の内部にあるから　$\dfrac{p^2}{9}+q^2<1$　　$\therefore\quad p^2+9q^2-9<0$

よって　　$|\beta_1-\alpha||\beta_2-\alpha|=\dfrac{9-p^2-9q^2}{1+8\sin^2\theta}$

$0\leqq\sin^2\theta\leqq1$ であるから，これが最大となるのは，

$$\sin^2\theta=0 \qquad \therefore\quad \theta=0$$

のときである．

よって，積 $|\beta_1-\alpha||\beta_2-\alpha|$ が最大となるのは，直線 ℓ が実軸（u 軸）に平行なときである．

別解１　直交座標上の楕円の問題として解いてもよい．

$\alpha=p+qi$ とする．また，$L=|\beta_1-\alpha||\beta_2-\alpha|$ とする．

直線 l が v 軸に平行であるとき，L が最大となることはないから，

直線 l の方程式は

$$v=m(u-p)+q$$

とおける．これと ① を連立させて

$$u^2+9\{m(u-p)+q\}^2=9$$

$$(1+9m^2)u^2-18m(mp-q)u+9(mp-q)^2-9=0$$

この方程式の 2 解を m_1，m_2 とすると，

$$|\beta_1-\alpha||\beta_2-\alpha|=\sqrt{m^2+1}\,|m_1-p|\cdot\sqrt{m^2+1}\,|m_2-p|$$

$$=(m^2+1)\left|m_1m_2-(m_1+m_2)p+p^2\right|$$

解と係数の関係により　$m_1m_2=\dfrac{18m(mp-q)}{1+9m^2}$，$m_1m_2=\dfrac{9(mp-q)^2-9}{1+9m^2}$

よって　$L=(m^2+1)\left|\dfrac{9(mp-q)^2-9}{1+9m^2}-\dfrac{18m(mp-q)}{1+9m^2}\cdot p+p^2\right|$

$$=(m^2+1)\left|\frac{p^2+9q^2-9}{1+9m^2}\right|=|p^2+9q^2-9|\cdot\frac{m^2+1}{1+9m^2}$$

$$=|p^2+9q^2-9|\cdot\frac{(9m^2+1)+8}{9(1+9m^2)}$$

$$=|p^2+9q^2-9|\cdot\left\{\frac{1}{9}+\frac{8}{9(1+9m^2)}\right\}$$

$m^2\geqq 0$ であるから，L が最大となるのは $m^2=0$，つまり $m=0$ のときである．

したがって，L が最大となるような ℓ は $v=q$，すなわち，実軸（ u 軸）に平行な直線である．

別解１終わり

$\boxed{\text{別解２}}$　楕円を円に変換し，方べきの定理を用いることもできる．
$L=|\beta_1-\alpha||\beta_2-\alpha|$ とする．
直線 ℓ が虚軸（v 軸）に平行であるとき，L が最大となることはないから，
直線 ℓ は虚軸（v 軸）に平行でないとする．

曲線 C を u 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 倍すると，曲線 C は O を中心とする半径 1 の円に変換される．

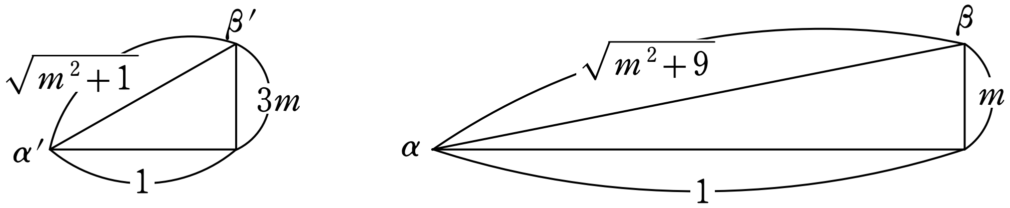
α，β_1，β_2 がこの変換により移る点の複素数を，それぞれ α'，$\beta_1{}'$，$\beta_2{}'$ とする．
方べきの定理により

$$|\beta_1{}'-\alpha'||\beta_2{}'-\alpha'|=|1+|\alpha||1-|\alpha||=|1-|\alpha|^2|=(\text{一定})$$

ここで，β_1，α，β_2 を通る直線 ℓ の傾きを m とすると，$\beta_1{}'$，α'，$\beta_2{}'$ を通る直線の傾きは $3m$ であるから，

$$|\beta_1-\alpha|=\frac{\sqrt{m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}|\beta_1{}'-\alpha'|,\quad |\beta_2-\alpha|=\frac{\sqrt{m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}|\beta_2{}'-\alpha'|$$

が成り立つ．



（図中の数字は辺の比を表す）

したがって，

$$L=|\beta_1-\alpha||\beta_2-\alpha|=\frac{m^2+9}{m^2+1}|\beta_1{}'-\alpha'||\beta_2{}'-\alpha'|$$

$$=\left(1+\frac{8}{m^2+1}\right)|\beta_1{}'-\alpha'||\beta_2{}'-\alpha'|$$

$m^2 \geqq 0$ であるから，L が最大となるのは $m^2=0$，つまり $m=0$ のときである．
このとき，直線 ℓ の傾きも 0 であるから，直線 ℓ は **実軸（u 軸）に平行な直線**である．

$\boxed{\text{別解２}}$終わり