解答速報 数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2022 年度　日本医科大学　前期

【　講　評　】

大問は例年通り 4 題で形式に変化はなかった．手がつかないような難問は無く，比較的解法を定めやすい問題が多かったが，計算量が多く，得点に結びつけるのは容易ではない．以下，大問ごとに特徴を述べる．

［Ⅰ］複素数平面上の点の軌跡に関する典型問題であった．この問題は計算量もそれほど多くないので，確実に得点したい．

［Ⅱ］問１は簡単な条件付き確率の問題であるから落とせない．問２は格子点の個数を求める典型問題である．n の偶奇での場合分けに注意が必要である．問３は問２ができていれば，容易に解ける問題であろう．これも確実に得点したい問題である．

［Ⅲ］２次曲線の楕円と直線，微分法（数Ⅲ）の最大・最小の融合問題であった．問１から問３は２次曲線の問題の特性に加えて，文字が多いことから計算が多いが，ミスなく正解を導きたい．類題を解いた経験があれば，要領よく計算ができたであろう．また，問５の最大・最小はいくつかの解法があるが，いずれも難易度が高い．ここは解ききれなくてもよいだろう．模範解答を参考に，復習に役立ててもらいたい．

［Ⅳ］数Ⅲの微分法，積分法に関する典型問題である．問１は関数の増減，曲線の凹凸を調べてグラフを図示するだけであるが，対数を用いないと計算が大変である．問２は y 軸周りの回転体の体積であるが，逆関数を用いる解法だと計算が煩雑になるため，バームクーヘン分割を用いると良いだろう．ウォリスの公式を覚えていれば，定積分計算を容易に済ますことができる．

全体的な難易度は昨年と同程度である．全体で 6 割程度の得点をしたい．

【　解　答　】

［Ⅰ］複素数平面（数Ⅲ）【標準】

ア：2,　イ：4,　ウ：2,　エ：2,　オ：2,　カ：2,

キ：2,　ク：2,　ケ：2,　コ：26,　サ：13,

［Ⅱ］確率（数A）／数列（数B）【標準】

問1　$p=\dfrac{x}{x+5y}$

問2　$N(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}n(n+4) & (n：偶数)\\ \dfrac{1}{4}(n^2+4n-1) & (n：奇数)\end{cases}$

問3　$n=87$

［Ⅲ］2次曲線（数Ⅲ）／微分法（数Ⅲ）【やや難】

問1　$\left(\dfrac{ma^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$

問2　$\dfrac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$

問3　$\dfrac{m(a^2-b^2)}{\sqrt{(m^2+1)(m^2a^4+b^4)}}$

問4　$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

問5　$\dfrac{3+4\sqrt{3}}{13}$

［Ⅳ］微分法・積分法（数Ⅲ）【標準】

問1　ア：7,　イ：13,　ウ：18,　エ：12,　オ：3,　カ：13,　キ：3

（グラフは解答参照）

問2　$\pi\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{3}{4}\pi\right)$

【　解　説　】

［Ｉ］

$w=\dfrac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}$ より

$$w(z+2-2i)=(4+2i)z+4-4i$$

$$(w-4-2i)z=-(2-2i)w+4-4i$$

$w=4+2i$ のとき，等式は成り立たないから $w\fallingdotseq 4+2i$ であり，

$$z=\frac{-(2-2i)(w-2)}{w-(4+2i)}$$

$\mathrm{P}(z)$ は中心が O，半径が 2 の円上にあるとき，$|z|=2$ が成り立つから

$$\left|\frac{-(2-2i)(w-2)}{w-(4+2i)}\right|=2$$

$$\sqrt{2}\,|w-2|=|w-(4+2i)|$$

両辺を 2 乗すると

$$2(w-2)(\overline{w}-2)=\{w-(4+2i)\}\{\overline{w}-(4-2i)\}$$

$$w\overline{w}-2iw+2i\overline{w}=12$$

$$(w+2i)(\overline{w+2i})=16$$

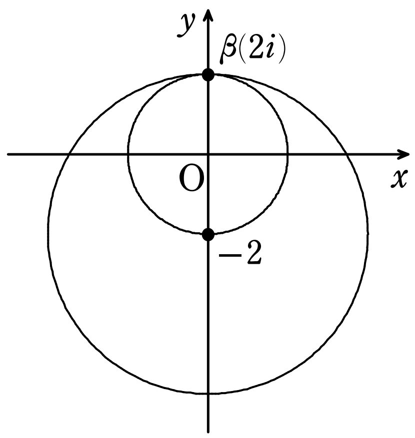
$$|w+2i|^2=16 \qquad \therefore \quad |w-(-2i)|=4$$

よって，点 $\mathrm{Q}(w)$ は複素数 $\alpha=-2i$ で表される点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心とし，半径 $r=4$ の円上を動く．

この円と円 C との共有点が $z=w$ を満たす点 $\mathrm{B}(\beta)$

であるから，右の図より

$$\beta=2i$$



また

$$z-w=z-\frac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}$$

$$=\frac{z(z+2-2i)-(4+2i)z-4+4i}{z+2-2i}$$

$$=\frac{z^2-2(1+2i)z-4(1-i)}{z+2-2i}$$

$$=\frac{(z-2i)(z-2-2i)}{z+2-2i}$$

よって $z\fallingdotseq\beta=2i$ のとき　$\dfrac{z-w}{z-\beta}=\dfrac{z-2-2i}{z+2-2i}$

$\sqrt{5}\,\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{BP}$ が成り立つとき　$\sqrt{5}\,\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BP}}\leqq 1$

$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BP}}=\left|\dfrac{z-w}{z-\beta}\right|$ であるから　$\sqrt{5}\left|\dfrac{z-2-2i}{z+2-2i}\right|\leqq 1$

両辺を 2 乗して整理すると

$$5(z-2-2i)(\overline{z}-2+2i)\leqq(z+2-2i)(\overline{z}+2+2i)$$

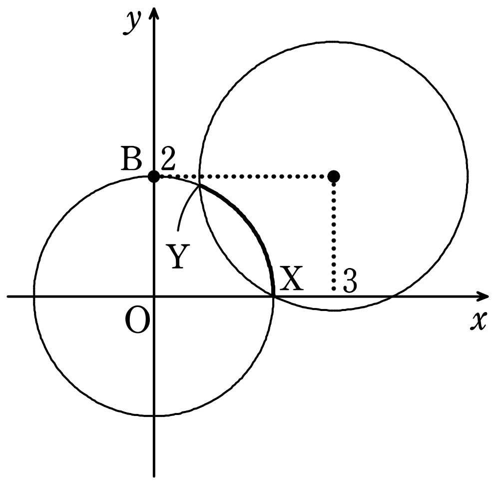
$$z\overline{z}-(3-2i)z-(3+2i)\overline{z}\leqq -8$$

$$\{z-(3+2i)\}\{\overline{z-(3+2i)}\}\leqq 5$$

$$|z-(3+2i)|^2\leqq 5 \qquad \therefore \quad |z-(3+2i)|\leqq\sqrt{5} \quad \cdots\cdots①$$

よって，点 $\mathrm{P}(z)$ は，中心が $\mathrm{C}(3+2i)$，半径が $\sqrt{5}$ の円の周上及び内部に存在する．

また，点 P(z) は円 C 上の点でもあるから，右図の太線部分に存在する．



図のように 2 点 X，Y をとると，BP が最大となるのは P＝X，BP が最小となるのは P＝Y のときである．

P＝X のとき $z=2$ であるから，最大値は

$$|2-2i|=2\sqrt{2}$$

次に， P＝Y のときについて考える．

$z=x+yi$ とおくと， z は円 C 上かつ ① を満たすから

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 & \cdots\cdots② \\ (x-3)^2+(y-2)^2 \leqq 5 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

② と ③ の境界線の差をとると

$$6x-9+4y-4=-1 \qquad \therefore \quad y=\frac{1}{2}(6-3x) \quad \cdots\cdots④$$

② に代入すると $\quad x^2+\dfrac{1}{4}(6-3x)^2=4$

$$(x-2)(13x-10)=0 \qquad \therefore \quad x=2,\ \frac{10}{13}$$

$x=\dfrac{10}{13}$ のとき ④ より $\quad y=\dfrac{1}{2}\left(6-\dfrac{30}{13}\right)=\dfrac{24}{13}$

よって， $z=\dfrac{10}{13}+\dfrac{24}{13}i$ のとき BP は最小となるから，その最小値は

$$\left|\left(\frac{10}{13}+\frac{24}{13}i\right)-2i\right|=\frac{2}{13}\sqrt{10^2+(24-26)^2}=\frac{2\sqrt{26}}{13}$$

別解 1　軌跡は「アポロニウスの円」によって求めてもよい．

$\sqrt{2}|w-2|=|w-(4+2i)|$ より，点 Q(w) は 2 点 2， $4+2i$ を結ぶ線分を $1:\sqrt{2}$ に

内分する点 $\quad \dfrac{1\cdot(4+2i)+\sqrt{2}\cdot 2}{1+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)i$

外分する点 $\quad \dfrac{-1\cdot(4+2i)+\sqrt{2}\cdot 2}{-1+\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}-(2\sqrt{2}+2)i$

を直径の両端とする円上に存在する．

この円の中心は $\quad \dfrac{2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)i-2\sqrt{2}-(2\sqrt{2}+2i)}{2}=-2i$，

半径は $\quad |2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)i-(-2i)|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$

よって，点 Q(w) は中心が $\boldsymbol{\alpha=-2i}$，半径が $\boldsymbol{r=4}$ の円上を動く．

$\sqrt{5}\left|\dfrac{z-2-2i}{z+2-2i}\right| \leqq 1$ より　　$\sqrt{5}|z-(2+2i)| \leqq |z-(-2+2i)|$

この不等式が表す領域の境界線は，2 点 $2+2i$，$-2+2i$ を結ぶ線分を $1:\sqrt{5}$ に

内分する点　$\dfrac{1\cdot(-2+2i)+\sqrt{5}\cdot(2+2i)}{1+\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}+2i$

外分する点　$\dfrac{-1\cdot(-2+2i)+\sqrt{5}\cdot(2+2i)}{-1+\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}+2i$

を直径の両端とする円である．

この円の中心は　$\dfrac{(3-\sqrt{5})+2i+(3+\sqrt{5}+2i)}{2}=3+2i$，

半径は　$|(3-\sqrt{5}+2i)-(3+2i)|=\sqrt{5}$

よって，点 $\mathrm{P}(z)$ は中心が $3+2i$，半径が $\sqrt{5}$ の円の周上および内部に存在する．

別解１終わり

別解２　複素数の実部・虚部を文字でおき，軌跡の方程式を導いてもよい．

$w=x+yi$ とおくと，$\sqrt{2}|w-2|=|w-(4+2i)|$ より

$$\sqrt{2}|(x+yi)-2|=|(x+yi)-(4+2i)|$$

$$2\{(x-2)^2+y^2\}=(x-4)^2+(y-2)^2$$

$$x^2+y^2+4y=12$$

$$\therefore\quad x^2+(y+2)^2=16$$

よって，点 $\mathrm{Q}(w)$ は中心が $\alpha=-2i$，半径が $r=4$ の円上を動く．

$z=x+yi$ とおくと，$\sqrt{5}|z-(2+2i)| \leqq |z-(-2+2i)|$ より

$$\sqrt{5}|(x+yi)-(2+2i)| \leqq |(x+yi)-(-2+2i)|$$

$$5\{(x-2)^2+(y-2)^2\} \leqq (x+2)^2+(y-2)^2$$

$$4x^2-16x+4y^2-24y+32 \leqq 0$$

$$\therefore\quad (x-2)^2+(y-3)^2 \leqq 5$$

よって，点 $\mathrm{P}(z)$ は中心が $2+3i$，半径が $\sqrt{5}$ の円の周上および内部に存在する．

別解２終わり

［Ⅱ］

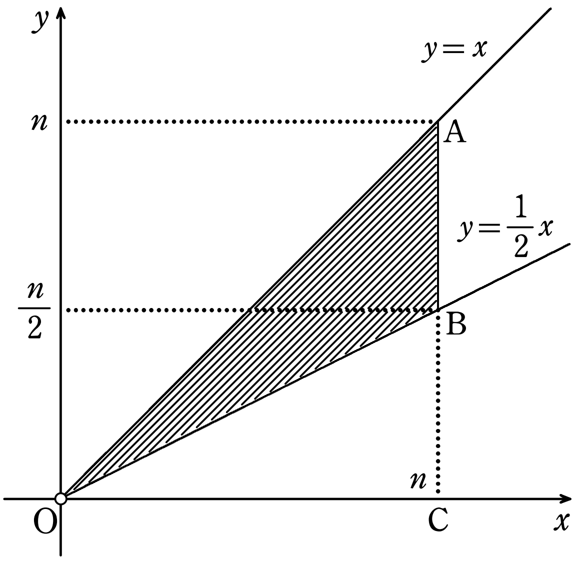
問１　赤球が取り出されたとき，その赤球が箱 A から取り出された確率 p は

$$p=\frac{(\text{箱 A から赤球が取り出される確率})}{(\text{赤球が取り出される確率})}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{n}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{n}+\frac{5}{6}\cdot\frac{y}{n}}=\boldsymbol{\frac{x}{x+5y}}$$

問２　$\frac{1}{6}\leqq p\leqq\frac{2}{7}$ のとき　　$\frac{1}{6}\leqq\frac{x}{x+5y}\leqq\frac{2}{7}$

$$\begin{cases} x+5y\leqq 6x \\ 7x\leqq 2x+10y \end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases} y\leqq x \\ y\geqq\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$1\leqq x\leqq n$，$1\leqq y\leqq n$ と合わせると，条件を満たす点 (x,y) の領域は次のようになる．



（ｉ）　n が偶数のとき

$y=k$ 上の格子点を数えて，

$$N(n)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k-k+1)+\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}(n-k+1)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(k+1)+\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}(n-k+1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\left\{2+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{8}n(n+6)+\frac{1}{8}n(n+2)=\frac{1}{4}n(n+4)$$

（ⅱ）　n が奇数のとき

$$N(n)=\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(k+1)+\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}(n-k+1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\left\{2+\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\right\}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\left\{\left(n-\frac{n+1}{2}+1\right)+1\right\}$$

$$=\frac{1}{8}(n-1)(n+5)+\frac{1}{8}(n+1)(n+3)=\frac{1}{4}(n^2+4n-1)$$

したがって，$\boldsymbol{N(n)=\begin{cases}\frac{1}{4}n(n+4) & (n:\text{偶数}) \\ \frac{1}{4}(n^2+4n-1) & (n:\text{奇数})\end{cases}}$

問３　$n \geqq 1$ のとき，n が偶数 のときも奇数のときも $N(n)$ が n について単調増加である．

$N(n) \fallingdotseq 2022$ とすると，　$N(n) \fallingdotseq \dfrac{1}{4}n^2$ より，

$$n \fallingdotseq \sqrt{4\cdot 2000}=40\sqrt{5} \fallingdotseq 40\cdot 2.236 \fallingdotseq 89$$

ここで,

$$N(86)=\frac{1}{4}\cdot 86\cdot 90=1935<2022$$

$$N(87)=\frac{1}{4}(87\cdot 91-1)=1979<2022$$

$$N(88)=\frac{1}{4}\cdot 88\cdot 92=2024>2022$$

$$N(89)=\frac{1}{4}(89\cdot 93-1)=2069>2022$$

であるので，　$N(n)<2022$ を満たす最大の整数 n は，　$\boldsymbol{n=87}$

$\boxed{\text{別解}}$　問２のように，境界線が直線である領域内の格子点の個数は，次のように数えることもできる．

（ｉ）　n が偶数のとき

$$\begin{aligned}N(n)&=(\triangle\mathrm{OAC}\text{ の格子点の個数})-(\triangle\mathrm{OBC}\text{ の格子点の個数})\\&\qquad+(\text{原点を除く辺 OB 上の格子点の個数})\\&=\frac{1}{2}\{(n+1)^2+(n+1)\}-\frac{1}{2}\left\{(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}+\frac{n}{2}\\&=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}(n+2)\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{n}{2}\\&=\frac{1}{2}(n+2)\cdot\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+4)}\end{aligned}$$

（ii）　n が奇数のとき

$$\begin{aligned}N(n)&=(\triangle\mathrm{OAC}\text{ の格子点の個数})-(\triangle\mathrm{OBC}\text{ の格子点の個数})\\&\qquad+(\text{原点を除く辺 OB 上の格子点の個数})\\&=\frac{1}{2}\{(n+1)^2+(n+1)\}-\frac{1}{2}\left\{(n+1)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\right\}+\frac{n-1}{2}\\&=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{4}(n+1)(n+3)+\frac{n-1}{2}\\&=\frac{1}{4}(n+1)^2+\frac{n-1}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}(n^2+4n-1)}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

［Ⅲ］

問 1　点 A $(s,\ t)$ とおくと，この点における接線の方程式は　$\dfrac{sx}{a^2}+\dfrac{ty}{b^2}=1$

この接線が直線 l： $mx+y-k=0$ と一致するから

$$\frac{\frac{s}{a^2}}{m}=\frac{\frac{t}{b^2}}{1}=\frac{-1}{-k} \qquad \therefore \begin{cases} s=\dfrac{a^2m}{k} \\ t=\dfrac{b^2}{k} \end{cases}$$

$\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{b^2}=1$ が成り立つから，これに代入すると

$$\frac{a^2m^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}=1 \qquad \therefore \quad k^2=a^2m^2+b^2$$

$k>0$ であるから　$k=\sqrt{a^2m^2+b^2}$

このとき　$s=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$，$t=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

よって，点 A の座標は　$\left(\dfrac{\boldsymbol{ma^2}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2m^2+b^2}}},\ \dfrac{\boldsymbol{b^2}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2m^2+b^2}}}\right)$

問 2　線分 OH の長さは，原点 O と直線 l との距離であるから

$$\frac{|-k|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{k}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{\boldsymbol{a^2m^2+b^2}}}{\sqrt{\boldsymbol{m^2+1}}}$$

問 3　$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}$ より　$\cos^2\theta=\dfrac{\dfrac{a^2m^2+b^2}{m^2+1}}{\dfrac{m^2a^4}{a^2m^2+b^2}+\dfrac{b^4}{a^2m^2+b^2}}=\dfrac{(a^2m^2+b^2)^2}{(m^2+1)(m^2a^4+b^4)}$

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{(a^2m^2+b^2)^2}{(m^2+1)(m^2a^4+b^4)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(m^4a^4+m^2b^4+m^2a^4+b^4)-(a^4m^4+2a^2b^2m^2+b^4)}{(m^2+1)(m^2a^4+b^4)}}$$

$$=\sqrt{\frac{m^2(a^2-b^2)^2}{(m^2+1)(m^2a^4+b^4)}}$$

$a>b$，$m>0$ より　$\sin\theta=\dfrac{\boldsymbol{m(a^2-b^2)}}{\sqrt{\boldsymbol{(m^2+1)(m^2a^4+b^4)}}}$

問 4　問 3 の $\sin\theta$ について，相加・相乗平均の不等式を用いると

$$\sin\theta=(a^2-b^2)\sqrt{\frac{m^2}{(m^2+1)(m^2a^4+b^4)}}=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4m^2+(a^4+b^4)+\dfrac{b^4}{m^2}}}$$

$$\leqq\frac{a^2-b^2}{\sqrt{2\sqrt{a^4m^2\cdot\dfrac{b^4}{m^2}}+a^4+b^4}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

等号が成り立つのは　$a^4m^2=\dfrac{b^4}{m^2}$　　$\therefore$　$m^4=\dfrac{b^4}{a^4}$

$a>b>0$，$m>0$ より　$m=\dfrac{b}{a}$

よって，$\sin\theta$ は $m=\dfrac{b}{a}$ のとき，最大値 $M(a,\ b)=\boldsymbol{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$ をとる.

問 5　$a-b=X$，$b-1=Y$ とおくと，$a>b>0$，$(a-b)^2+(b-1)^2\leqq\dfrac{3}{4}$ より

$$X^2+Y^2\leqq\frac{3}{4},\quad X>0,\quad Y>-1\quad\cdots\cdots①$$

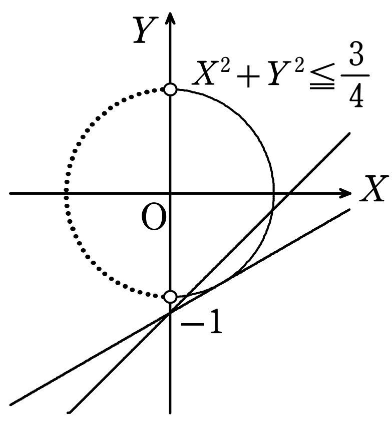
$a=X+Y+1$，$B=Y+1$ であるから

$$M(a,\ b)=\frac{(X+Y+1)^2-(Y+1)^2}{(X+Y+1)^2+(Y+1)^2}=\frac{X^2+2X(Y+1)}{X^2+2X(Y+1)+2(Y+1)^2}=\frac{1+2\cdot\dfrac{Y+1}{X}}{1+2\cdot\dfrac{Y+1}{X}+2\cdot\left(\dfrac{Y+1}{X}\right)^2}$$

$\dfrac{Y+1}{X}=k$　$\cdots\cdots②$　とおくと　$M(a,\ b)=\dfrac{2k+1}{2k^2+2k+1}$

また，② より $Y=kX-1$ であり，これは XY 平面上において，傾き k，Y 切片 -1 の直線を表す.
この直線と，① が表す XY 平面上の領域が共有点を持つときの，k のとりうる値の範囲は

$$\begin{cases}\dfrac{|-1|}{\sqrt{k^2+1}}\leqq\dfrac{3}{4}\\ k>0\end{cases}\iff\begin{cases}\dfrac{1}{3}\leqq k^2\\ k>0\end{cases}\iff k\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}$$



よって，$k\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ における $M(a,\ b)$ の最大値を求める.

$$\frac{d}{dk}M(a,\ b)=\frac{2\cdot(2k^2+2k+1)-(2k+1)\cdot(4k+2)}{(2k^2+2k+1)^2}$$

$$=\frac{-4k(k+1)^2}{(2k^2+2k+1)^2}<0$$

$M(a,\ b)$ は $k\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ において減少関数であるから，$k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに最小値をとり，

その最小値は　$M(a,\ b)=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1}{2\cdot\dfrac{2}{3}+2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{3+4\sqrt{3}}{13}}$

$\boxed{\text{別解１}}$　問１は楕円と直線の方程式を連立させてもよい．

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と $y=-mx+k$ を連立させて　　$b^2x^2+a^2(-mx+k)^2=a^2b^2$

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2mka^2x+a^2(k^2-b^2)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

③ の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=m^2k^2a^4-(a^2m^2+b^2)\cdot a^2(k^2-b^2)=a^2b^2(a^2m^2+k^2-b^2)$

楕円 C と直線 l が接するとき，$D=0$ であるから　　$a^2m^2+k^2-b^2=0$　　$\therefore$　$k^2=a^2m^2+b^2$

$k>0$ であるから　　$k=\sqrt{a^2m^2+b^2}$

このとき，③ の重解は　　$x=\dfrac{mka^2}{a^2m^2+b^2}=\dfrac{ma^2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{a^2m^2+b^2}=\dfrac{ma^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

$y=-mx+k=-mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ に代入すると

$$y=-m\cdot\frac{ma^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}+\sqrt{a^2m^2+b^2}=\frac{-m^2a^2+a^2m^2+b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

よって，点 A の座標は　　$\left(\boldsymbol{\dfrac{ma^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}}\right)$

$\boxed{\text{別解１}}$終わり

$\boxed{\text{別解２}}$　問５の最大値は，次のように求めることもできる．

$\dfrac{b}{a}=x$ とおくと　　$M(a,\ b)=\dfrac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{-(1+x^2)+2}{1+x^2}=\dfrac{2}{1+x^2}-1$

$\dfrac{b}{a}=x$ より $b=ax$ であるから，$(a-b)^2+(b-1)^2\leqq\dfrac{3}{4}$ に代入すると　　$\{a(1-x)\}^2+(ax-1)^2\leqq\dfrac{3}{4}$

$$\therefore\quad (2x^2-2x+1)a^2-2xa+\frac{1}{4}\leqq 0 \quad \cdots\cdots ④$$

また，$a>b>0$ より　　$a>ax>0$　　$\therefore$　$0<x<1$

この不等式を満たす a が $a>0$ の範囲に存在する条件を求める．

$f(a)=(2x^2-2x+1)a^2-2xa+\dfrac{1}{4}$ とおくと　　$2x^2-2x+1=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$

$y=f(a)$ は下に凸の放物線であり，軸について　　$\dfrac{x}{2x^2-2x+1}>0$ ($\because$ $x>0$)

よって，不等式 ④ を満たす a が $a>0$ の範囲に存在する条件は，$f(a)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=x^2-(2x^2-2x+1)\cdot\frac{1}{4}\geqq 0$$

$$2x^2+2x-1\geqq 0 \qquad \therefore\quad x\leqq\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\quad \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\leqq x$$

$0<x<1$ より　　$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\leqq x<1$

$M(a,\ b)$ は x について減少関数であるから，$x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のとき最大となり，その最大値は

$$\frac{2}{1+\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}-1=\frac{4}{4-\sqrt{3}}-1=\frac{4(4+\sqrt{3})}{13}-1=\boldsymbol{\frac{3+4\sqrt{3}}{13}}$$

$\boxed{\text{別解２}}$終わり

$\boxed{\text{別解3}}$ 問5の最大値は,「予選決勝法」により求めることもできる.
b を固定し, a を変数とみる.

$$M(a,\ b)=\frac{(a^2+b^2)-2b^2}{a^2+b^2}=1-\frac{2b^2}{a^2+b^2}$$

であるから, a を変数とすると $M(a,\ b)$ は増加関数である.

また, $(a-b)^2+(b-1)^2\leqq\dfrac{3}{4}$ より　　$(a-b)^2\leqq\dfrac{3}{4}-(b-1)^2$

$a>b>0$ より $a-b>0$ であるから　　$0<a-b\leqq\sqrt{\dfrac{3}{4}-(b-1)^2}$

$$\therefore\quad b<a\leqq b+\sqrt{\frac{3}{4}-(b-1)^2}$$

よって, a の最大値は　　$a=b+\sqrt{\dfrac{3}{4}-(b-1)^2}=b+\dfrac{1}{2}\sqrt{-4b^2+8b-1}$

次に, b を変数とみる. $M(a,\ b)$ を b について微分すると

$$\frac{d}{db}M(a,\ b)=\frac{\left(2a\cdot\dfrac{da}{db}-2b\right)\cdot(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cdot\left(2a\cdot\dfrac{da}{db}+2b\right)}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{-4a^2b+4ab^2\cdot\dfrac{da}{db}}{(a^2+b^2)^2}=\frac{4ab\left(b\cdot\dfrac{da}{db}-a\right)}{(a^2+b^2)^2}$$

$a>b>0$ より, $\dfrac{d}{db}M(a,\ b)$ の符号は $b\cdot\dfrac{da}{db}-a$ の符号と一致する.

$\dfrac{da}{db}=1+\dfrac{-8b+8}{4\sqrt{-4b^2+8b-1}}=1+\dfrac{-2b+2}{\sqrt{-4b^2+8b-1}}$ であるから

$$b\cdot\frac{da}{db}-a=b\cdot\left(1+\frac{-2b+2}{\sqrt{-4b^2+8b-1}}\right)-\left(b+\frac{1}{2}\sqrt{-4b^2+8b-1}\right)$$

$$=\frac{-4b(b-1)-(-4b^2+8b-1)}{2\sqrt{-4b^2+8b-1}}=\frac{1-4b}{2\sqrt{-4b^2+8b-1}}$$

よって, $M(a,\ b)$ の b に関する増減は, 次のようになる.

b	0		$\frac{1}{4}$	
$\frac{d}{db}M(a,\ b)$		$+$	0	$-$
$M(a,\ b)$		$\nearrow$		$\searrow$

したがって, $M(a,\ b)$ は $b=\dfrac{1}{4}$ のときに最大値をとる.

$b=\dfrac{1}{4}$ のとき　　$a=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{1}{4}+2-1}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

よって, $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$ のとき $M(a,\ b)$ は最大値をとり, その最大値は

$$\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\frac{3+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{\mathbf{3+4\sqrt{3}}}{\mathbf{13}}$$

［Ⅳ］

問１　$f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}>0$ であるから，両辺の自然対数をとると

$$\log f(x)=\log\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}\{\log(1-\sqrt{x})-\log(1+\sqrt{x})\}$$

$0<x<1$ のとき，両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$$

$$\therefore\quad f'(x)=-\frac{f(x)}{2\sqrt{x}(1-x)}<0\quad(\because\ f(x)>0 \text{ かつ } 0<x<1)$$

また，$g(x)=\sqrt{x}(1-x)$ とおくと　$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1-x)+\sqrt{x}\cdot(-1)=\dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}$ であるから，x で微分すると

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$=-\frac{-\frac{f(x)}{2g(x)}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{1-3x}{2\sqrt{x}}}{2x(1-x)^2}=-\frac{3x-\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}(1-x)^2}f(x)$$

$f''(x)=0$ のとき　$3x-\sqrt{x}-1=0$

$$3(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-1=0\qquad\therefore\quad\sqrt{x}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$$

$\sqrt{x}>0$ であるから　$\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$　$\therefore\quad x=\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^2=\dfrac{7+\sqrt{13}}{18}$

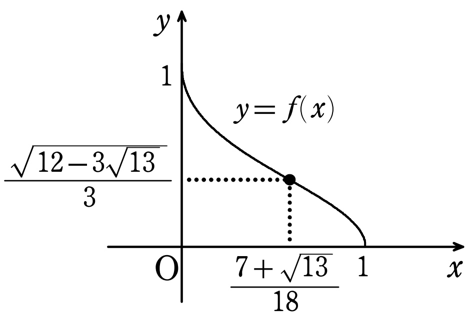
したがって，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における増減，凹凸は次のようになる．

x	0		$\frac{7+\sqrt{13}}{18}$		1
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘		↘	0

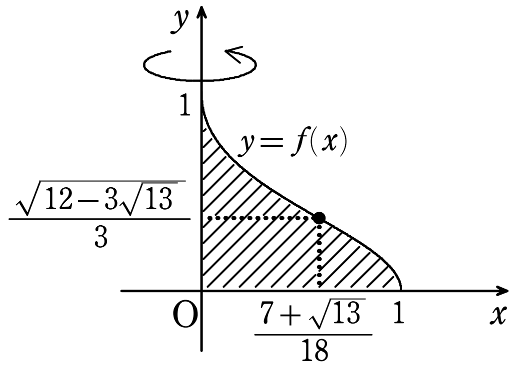
$$f\left(\frac{7+\sqrt{13}}{18}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{1+\sqrt{13}}{6}}{1+\frac{1+\sqrt{13}}{6}}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{7+\sqrt{13}}}=\frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}$$

よって，$y=f(x)$ の変曲点の座標は　$\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{18},\ \dfrac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}\right)$

また，$y=f(x)$ のグラフは下の図のようになる．



問２　求める体積を V とすると，右図の斜線部分を y 軸のまわりに回転させた立体の体積であるから



$$V=\int_0^1 2\pi x\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\ dx$$

$\sqrt{x}=t$ とおくと，　$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore\ \ dx=2\sqrt{x}\,dt=2t\,dt$，

x	$0\longrightarrow1$
t	$0\longrightarrow1$

よって　$V=2\pi\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\cdot 2t\,dt=4\pi\int_0^1\frac{t^3}{1+t}\sqrt{1-t^2}\ dt$

$t=\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと　　$dt=\cos\theta\ d\theta$，

t	$0\longrightarrow1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$

したがって

$$V=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\theta}{1+\sin\theta}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\ d\theta$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\theta\cos^2\theta}{1+\sin\theta}\ d\theta=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)}{1+\sin\theta}\ d\theta$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta(1-\sin\theta)\,d\theta=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-\sin^4\theta)\,d\theta$$

ここで，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\ d\theta$ (n は０以上の整数) とすると，

$$V=4\pi(I_3-I_4)$$

また，$I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$ が成り立ち，

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\ d\theta=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\ d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

であるから

$$I_3=\frac{2}{3}I_1=\frac{2}{3}\cdot1=\frac{2}{3},\quad I_4=\frac{3}{4}I_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0=\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$$

よって　　$V=4\pi\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{16}\pi\right)=\pi\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$\boxed{別解1}$　問1の微分計算は，変数変換により関数を簡単な形にしてもよい．

$f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ より　$\{f(x^2)\}^2=\dfrac{1-x}{1+x}$

両辺を x で微分すると　　$4xf'(x^2)f(x^2)=\dfrac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}=-\dfrac{2}{(1+x)^2}$

$x\fallingdotseq 0$ のとき　　$f'(x^2)=-\dfrac{1}{2x(1+x)^2f(x^2)}$

よって　　$f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2f(x)}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$

また　　$\{f'(x^2)\}^{-2}=4x^2(1+x)^4\{f(x^2)\}^2=4x^2(1+x)^3(1-x)$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{-4xf''(x^2)}{\{f'(x^2)\}^3}&=8x(1+x)^3(1-x)+12x^2(1+x)^2(1-x)-4x^2(1+x)^3\\&=4x(1+x)^2\{2(1-x^2)+3x(1-x)-x(1+x)\}\\&=-8x(1+x)^2(3x^2-x-1)\end{aligned}$$

$\therefore$　$f''(x^2)=2(1+x)^2(3x^2-x-1)\{f'(x^2)\}^3$

よって　　$f''(x)=2(1+\sqrt{x})^2(3x-\sqrt{x}-1)\{f'(x)\}^3=-\dfrac{3x-\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}$

$\boxed{別解1}$終わり

$\boxed{別解2}$　問2の体積は，逆関数を用いて求めてもよい．

$y=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ より　　$\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=y^2$

$$(1+y^2)\sqrt{x}=1-y^2$$

$$\sqrt{x}=\frac{1-y^2}{1+y^2}\qquad\therefore\quad x=\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2$$

求める体積を V とすると

$$V=\int_0^1\pi x^2\,dy=\pi\int_0^1\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^4dy=\pi\int_0^1\left(\frac{2}{1+y^2}-1\right)^4dy$$

ここで，$y=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと　　$\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，

y	$0\to1$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{4}$

よって，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1\right)^4\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^4\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(16\cos^6\theta-32\cos^4\theta+24\cos^2\theta-8+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-8+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta=\Big[-8\theta+\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-2\pi+1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}24\cos^2\theta\,d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=12\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=3\pi+6$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}32\cos^4\theta\ d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)^2\,d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{1+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right\}d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta$$

$$=\Big[12\theta+8\sin 2\theta+\sin 4\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=3\pi+8$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}16\cos^6\theta\ d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)^3\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+3\cos 2\theta+3\cos^2 2\theta+\cos^3 2\theta)\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{1+3\cos 2\theta+\frac{3}{2}(1+\cos 4\theta)+\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+\cos 6\theta)\right\}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{5}{2}+\frac{15}{4}\cos 2\theta+\frac{3}{2}\cos 4\theta+\frac{1}{4}\cos 6\theta\right)d\theta$$

$$=\left[5\theta+\frac{15}{4}\sin 2\theta+\frac{3}{4}\sin 4\theta+\frac{1}{12}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{5}{4}\pi+\frac{11}{3}$$

以上より

$$V=\pi\left\{\frac{5}{4}\pi+\frac{11}{3}-(3\pi+8)+3\pi+6-2\pi+1\right\}=\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{3}{4}\pi\right)$$

$\boxed{\text{別解２}}$終わり