2022年度　日本大学（２次）

【　講　評　】

本年が初実施となった全問記述式の２次試験は，60 分で３題での出題であった．そのうち１題は小問集合で，残りの２題が設問のある大問であった．微分法・積分法（数Ⅲ）からの出題が中心で，難易度は以前の A 方式の記述問題よりも全体的に易しくなり，分量もやや少なくなったと言える．場合の数・確率，整数の性質，図形といった，受験生が苦手とする分野が出題されなかったため，差がつきづらいことが予想される．7 割以上の得点は必要となるだろう．

【　解　答　】

［Ⅰ］小問集合【易】

(1)　(1−1)　$f'(x)=14(2x+5)^6$　　(1−2)　$f'(x)=3\cos(3x+7)$

(1−3)　$f'(x)=4e^{4x+3}$　　(1−4)　$f'(x)=(2\log|5x+9|)'=\dfrac{10}{5x+9}$

(2)　解説参照

［Ⅱ］関数の性質／積分法（数Ⅲ）【やや易】

(1)　$g(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-3)$　$(x\geqq 0)$　　(2)　(3，3)　　(3)　$9-\sqrt{3}$

［Ⅲ］微分法（数Ⅲ）／三角関数（数Ⅱ）【標準】

(1)　$S(\theta)=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}$，　$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2)　最大値 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，　$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

【 問 題 】

［1］以下の問いに答えなさい.

(1) つぎの関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい.

(1−1) $f(x)=(2x+5)^7$

(1−2) $f(x)=\sin(3x+7)$

(1−3) $f(x)=e^{4x+3}$

(1−4) $f(x)=\log(5x+9)^2$

(2) 2次方程式 $x^2+x+1=0$ の2解を α, β とする. ただし, $\alpha \fallingdotseq \beta$ である.
自然数 $n\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して, $f(n)=\alpha^n+\beta^n$ とおくとき, $f(n+2)+f(n+1)+f(n)=0$ が成り立つことを証明しなさい.

［2］関数 $y=\sqrt{2x+3}$ を考えて, その逆関数を $y=g(x)$ で表すとする. このとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) $g(x)$ を求めなさい.

(2) $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの交点の座標を求めなさい.

(3) 2つの曲線 $y=\sqrt{2x+3}$, $y=g(x)$ および y 軸で囲まれる図形の面積を求めなさい.

［3］原点Oの座標平面上に, Oを中心とする半径1の円と円周上の動点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ および定点 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$ がある.
このとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, 線分ABと y 軸との交点をCとする. 三角形OACの面積を $S(\theta)$ で表すとき, $S(\theta)$ を θ の関数として表し, $S(\theta)$ が最大値をとるときの $\cos\theta$ の値を求めなさい.

(2) $0<\theta<\pi$ のとき, 点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ と直線ABとの距離を d で表すとき, d の最大値およびそのときの $\cos\theta$ の値を求めなさい.

【　解　説　】

［１］

(1)

(1−1)　$f'(x)=14(2x+5)^6$

(1−2)　$f'(x)=3\cos(3x+7)$

(1−3)　$f'(x)=4e^{4x+3}$

(1−4)　$f'(x)=(2\log|5x+9|)'=\dfrac{10}{5x+9}$

(2)　α，β は $x^2+x+1=0$ の解であるから

$$\alpha^2+\alpha+1=0 \quad \cdots\cdots①,\ \beta^2+\beta+1=0 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ.

このとき ①，② により

$$\begin{aligned}&f(n+2)+f(n+1)+f(n)\\&=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\alpha^n+\beta^n\\&=\alpha^n(\alpha^2+\alpha+1)+\beta^n(\beta^2+\beta+1)\\&=\alpha^n\cdot 0+\beta^n\cdot 0=0\end{aligned}$$

よって，$f(n+2)+f(n+1)+f(n)=0$ が成り立つ.　■

［Ⅱ］

(1)　$2x+3 \geqq 0$ より　　$x \geqq -\dfrac{3}{2}$

また　　$y=\sqrt{2x+3} \geqq 0$

$y=\sqrt{2x+3}$ より　　$y^2=2x+3$　　　$\therefore$　$x=\dfrac{1}{2}(y^2-3)$

よって，$y=\sqrt{2x+3}$ の逆関数 $y=g(x)$ は

$$\boldsymbol{g(x)=\frac{1}{2}(x^2-3)\quad (x \geqq 0)}$$

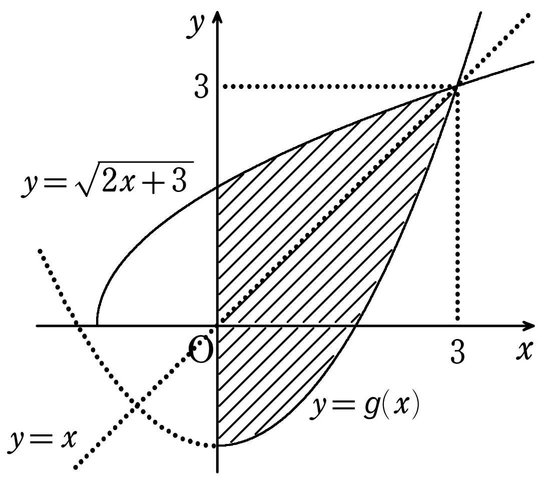
(2)　$y=\sqrt{2x+3}$ と $y=g(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称であり，グラフより交点はすべて $y=x$ 上にあるから，$g(x)=x$ として

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$　　　$\therefore$　$x=-1,\ 3$

$x \geqq 0$ より，求める交点の座標は　　$\boldsymbol{(3,\ 3)}$

(3)　求める面積は，右の図の斜線部分であるから



$$\int_0^3 \left\{\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2}(x^2-3)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x\right]_0^3$$

$$=\frac{1}{3}(27-3\sqrt{3})-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}$$

$$=\boldsymbol{9-\sqrt{3}}$$

$\boxed{\text{別解}}$　(2)は対称性を用いなくてもよい．

$y=\sqrt{2x+3}$ と $y=g(x)$ を連立させて

$\sqrt{2x+3}=\dfrac{1}{2}(x^2-3)$　　　$\therefore$　$2\sqrt{2x+3}=(x^2-3)$　……①

$x<\sqrt{3}$ のとき，① は成り立たないから，$x \geqq \sqrt{3}$ のとき，両辺を 2 乗すると

$4(2x+3)=(x^2-3)^2$

$x^4-6x^2-8x-3=0$

$(x+1)^3(x-3)=0$

$x \geqq \sqrt{3}$ であるから　　$x=3$

$y=\sqrt{2x+3}$ より　　$y=\sqrt{2\cdot 3+3}=3$

よって，求める交点の座標は　　$\boldsymbol{(3,\ 3)}$

$\boxed{\text{別解}}$終わり

［Ⅲ］

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\cos\theta<1$ であるから，直線 AB の方程式は

$$y=\frac{\sin\theta-0}{\cos\theta-(-1)}(x+1) \qquad \therefore \quad y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}(x+1) \quad \cdots\cdots①$$

$x=0$ のとき　　$y=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

よって，点 C の座標は　　$\left(0,\ \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}>0$ であるから，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\cos\theta=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

また，

$$\begin{aligned}S'(\theta)&=\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1+\cos\theta)-\sin\theta\cos\theta(-\sin\theta)}{2(1+\cos\theta)^2}\\&=\frac{(2\cos^2\theta-1)(1+\cos\theta)+(1-\cos^2\theta)\cos\theta}{2(1+\cos\theta)^2}\\&=\frac{(2\cos^2\theta-1)(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)\cos\theta}{2(1+\cos\theta)^2}\\&=\frac{\cos^2\theta+\cos\theta-1}{2(1+\cos\theta)}\end{aligned}$$

$S'(\theta)=0$ のとき　　$\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$　　$\therefore$　$\cos\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\cos\theta<1$ であるから　　$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

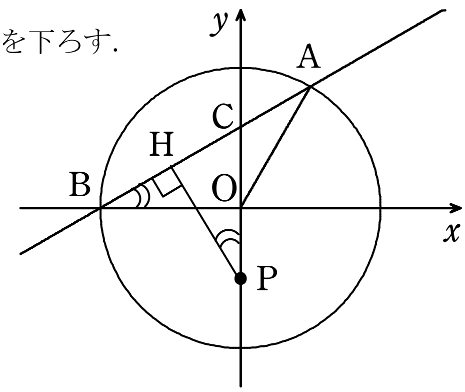
これを満たす θ を α とすると，$S(\theta)$ の $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における増減は次のようになる.

θ	0		α		$\dfrac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗		↘	

$S(\theta)$ は $\theta=\alpha$ で最大値をとるから，そのときの $\cos\theta$ の値は

$$\cos\theta=\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

(2)　点 $P\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ とおき，点 P から直線 AB へ垂線 PH を下ろす．



円周角の定理により　　$\angle ABO=\dfrac{\theta}{2}$

$\triangle CBO \backsim \triangle CPH$ より　　$\angle CPH=\angle CBO=\dfrac{\theta}{2}$

また　$CP=CO+OP=\tan\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{2}$

よって，△CPH に注目すると

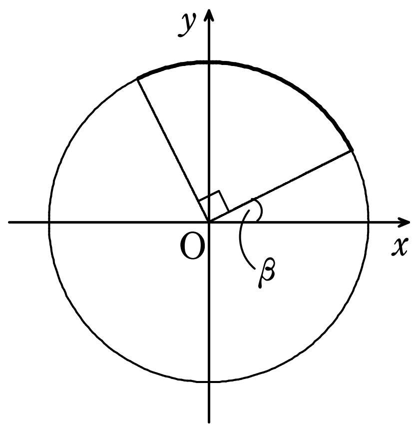
$$d=PH=CP\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\left(\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\beta\right)$$

ただし β は，$\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす．

$0<\theta<\pi$ より　　$\beta<\dfrac{\theta}{2}+\beta<\dfrac{\pi}{2}+\beta$



よって，$\dfrac{\theta}{2}+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\pi-2\beta$ のとき，

d は最大値 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ をとる．

また，このとき

$$\cos\theta=\cos(\pi-2\beta)=-\cos 2\beta$$

$$=2\sin^2\beta-1=2\cdot\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}$$

$\boxed{別解１}$　(2)の d は，点と直線の距離の公式で求めてもよい．

① より，直線 AB の方程式は　　$(\sin\theta)x-(1+\cos\theta)y+\sin\theta=0$

点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ と直線 AB の距離を d とすると

$$d=\frac{\left|\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+\sin\theta\right|}{\sqrt{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}}=\frac{|2\sin\theta+\cos\theta+1|}{2\sqrt{2(1+\cos\theta)}}$$

$0<\theta<\pi$ より　　$\sin\theta>0$，$1+\cos\theta>0$

また，$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より　　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$

$$d=\frac{2\sin\theta+\cos\theta+1}{2\sqrt{2(1+\cos\theta)}}=\frac{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

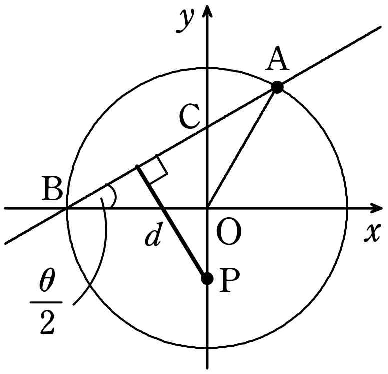
（以下，本解同様）

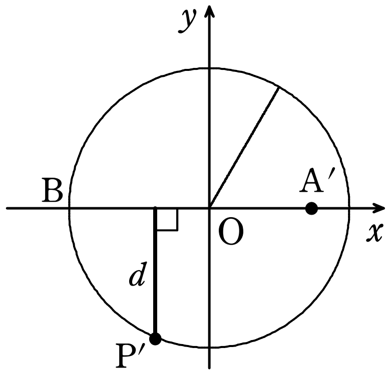
$\boxed{別解１}$終わり

$\boxed{\text{別解２}}$　(2)の d は，回転移動（複素数平面）を利用して求めてもよい．

点 $\mathrm{P}\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ とおく．

円周角の定理により，$\angle\mathrm{ABO}=\dfrac{\theta}{2}$ であるから，点A，P を B を中心に $-\dfrac{\theta}{2}$ だけ回転させた点を A'，P' とすると，直線 AB' は x 軸に重なるから，d は点 P' と x 軸との距離に等しい．





$\mathrm{P}'(a,\ b)$ とすると，

$$(a+bi)-(-1)=\left\{-\frac{1}{2}i-(-1)\right\}\left\{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$a+bi=\left(1-\frac{i}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)-1$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}-1+i\left(-\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore\quad a=\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}-1,\quad b=-\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

よって　　$d=\left|-\sin\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\left|2\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$

$0<\theta<\pi$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

したがって　　$d=\dfrac{1}{2}\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$

$\boxed{\text{別解２}}$終わり