解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　東京大学（文科）

【　講　評　】

例年通り，大問４題での出題であった．頻出である通過領域や整数問題の出題がなかった．一方，常用対数に関する問題が出題された点が目新しい．難易度が穏やかであった第３問に加え，第１問（または第２問）を完答し，残りは部分点を狙いたい．

１．図形と方程式（円の性質）／積分法（面積）／式と証明（不等式証明）【標準】

(1) は円と放物線が２点で接する条件を処理する典型問題で，ここは確実に得点したい．(2) は (1) ができていれば問題ないだろう．(3) は不等式証明で，様々な方針で示すことができるため，少し時間を長めに割いてでも完答したい．

２．常用対数の利用【標準】

東大では珍しいテーマの出題であった．(1) は簡単な常用対数の計算問題なので，落とせない．(2) はそのまま対数をとるわけにもいかないため，手が止まってしまった人がいるかもしれない．整数 m がある程度大きな値のとき， 5^m に比べて 4^m がはるかに小さいという感覚があると答えの予想がしやすかったかもしれない．予想ができている人にとっては，後は不等式を導いて示すだけの問題である．

３．図形と方程式／図形と計量【やや易】

(1) は点の座標を求める問題で，与えられた角度の条件から直線の傾きを求めて方程式を立ててもよいし，図形的に求めてもよい．(2)，(3) は (1) ができていれば簡単な計算問題であるため，この問題は完答必須である．

４．確率【やや難】

正 n 角形の頂点から４点を選んでできる四角形が，正 n 角形の外接円の中心を含む確率を求める問題であった．典型的な問題である（三角形について出題される場合が多い）ため，答えの出し方がわかった人は多いかもしれないが，正しく論証する点が難しく，完答するのは容易ではない．ここは部分点狙いでよいだろう．

【 解 説 】

第１問

$0° < \theta < 90°$ であるから，$0 < \sin\theta < 1$，$0 < \cos\theta < 1$ である．

(1) 放物線 C は２点 P，Q を通るとき，

$$\begin{cases}\sin\theta = a\cos^2\theta + b\cos\theta + c \\ \sin\theta = a\cos^2\theta - b\cos\theta + c\end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

$0° < \theta < 90°$ より $\cos\theta \fallingdotseq 0$ であるから，これらが成り立つとき，　$b = 0$

よって，　① $\iff$ $\sin\theta = a\cos^2\theta + c$　……②

C：$y = ax^2 + c$ について，　$y' = 2ax$

よって，点 P における放物線 C の法線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{2a\cos\theta}(x - \cos\theta) + \sin\theta$$

$$\therefore \quad y = -\frac{x}{2a\cos\theta} + \sin\theta + \frac{1}{2a}$$

放物線 C と円 $x^2 + y^2 = 1$ が点 P で接するとき，この法線は円の中心 $(0,\ 0)$ を通るから，

$s = \sin\theta$ より，

$$0 = \sin\theta + \frac{1}{2a} \qquad \therefore \quad a = -\frac{1}{2\sin\theta} = -\frac{1}{2s}$$

これを ② に代入すると，$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - s^2$ であるから，

$$\sin\theta = -\frac{1}{2s}(1 - s^2) + c$$

$$\therefore \quad c = s + \frac{1}{2s}(1 - s^2) = \frac{1 + s^2}{2s}$$

以上より，　$a = -\frac{1}{2s}$，$b = 0$，$c = \frac{1}{2}$

(2) (1) より放物線 C の方程式は，

$$y = -\frac{1}{2s}x^2 + \frac{1 + s^2}{2s} = -\frac{1}{2s}(x - \sqrt{1 + s^2})(x + \sqrt{1 + s^2})$$

$-\sqrt{1 + s^2} \leqq x \leqq \sqrt{1 + s^2}$ のとき $y \geqq 0$ であるから，求める面積は，

$$\begin{aligned}A &= \int_{-\sqrt{1+s^2}}^{\sqrt{1+s^2}} -\frac{1}{2s}(x - \sqrt{1 + s^2})(x + \sqrt{1 + s^2})\,dx \\ &= \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{6}(\sqrt{1 + s^2} + \sqrt{1 + s^2})^3 \\ &= \frac{2\sqrt{(s^2 + 1)^3}}{3s}\end{aligned}$$

(3) $0 < s < 1$ より $A > 0$ であるから，$A^2 \geqq 3$ を示せば十分である．

$$A^2 - 3 = \frac{4(s^2 + 1)^3 - 27s^2}{9s^2} = \frac{4s^6 + 12s^4 - 15s^2 + 4}{9s^2}$$

$t=s^2$ とおくと，$0<s<1$ より $0<t<1$ であるから，

$$A^2-3=\frac{4t^3+12t^2-15t+4}{9t} \quad \cdots\cdots ③$$

$$=\frac{(t+4)(4t^2-4t+1)}{9t}=\frac{(t+4)(2t-1)^2}{9t}\geqq 0$$

等号が成り立つのは，

$$\begin{cases}2t-1=0\\0<t<1\end{cases} \iff \begin{cases}s^2=\dfrac{1}{2}\\0<s<1\end{cases} \iff s=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，$A^2\geqq 3$ すなわち $A\geqq\sqrt{3}$ が成り立つ．（証明終）

$\boxed{\text{別解}}$ (1) の放物線 C と円 $x^2+y^2=1$ が 2 点 P，Q で接することは，次のように処理することができる．
放物線 C は y 軸に平行な軸をもつ放物線で，単位円上の y 軸に関して対称な 2 点 P，Q を通るから，
放物線 C の軸は y 軸であることがわかり，$b=0$ である．
$y=ax^2+c$ が点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通るから，　$\sin\theta=a\cos^2\theta+c$ $\cdots\cdots$④
また，$y=ax^2+c$ と $x^2+y^2=1$ を連立させると，

$$\frac{y-c}{a}+y^2=1 \qquad \therefore \quad ay^2+y-a-c=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

放物線 C と円 $x^2+y^2=1$ が点 P で接するとき，y の方程式 ⑤ は $y=\sin\theta=s$ を重解にもつから，
解と係数の関係により，

$$s+s=-\frac{1}{a} \qquad \therefore \quad a=-\frac{1}{2s}$$

これを ④ に代入すると，$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-s^2$ であるから，

$$s=-\frac{1}{2s}(1-s^2)+c \qquad \therefore \quad c=\frac{1+s^2}{2s}$$

よって，　$a=-\dfrac{1}{2s}$，$b=0$，$c=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{別解}}$ (3) の不等式は，相加・相乗平均の不等式を用いて示すこともできる．

$$A=\frac{2\sqrt{(s^2+1)^3}}{3s}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{(s^2+1)^3}{s^2}}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}}\right)^3$$

ここで，$0<s<1$ であるから，相加・相乗平均の不等式により，

$$\frac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}=s^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{s^{\frac{2}{3}}}=s^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}$$

$$\geqq 3\sqrt[3]{s^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}}=\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

等号が成り立つのは，　$s^{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}$ かつ $0<s<1$ $\iff$ $s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

このことから，　$A=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{\dfrac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}}\right)^3\geqq\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{\dfrac{3}{2^{\frac{2}{3}}}}\right)^3=\sqrt{3}$

したがって，$A\geqq\sqrt{3}$ が成り立つ．（証明終了）

別解 (3) で③の因数分解に気づけなければ，微分法を用いて示すことになる．

$s^2=t$ とおくと，$0<t<1$ で，

$$A^2-3=\frac{4t^3+12t^2-15t+4}{9t} \quad \cdots\cdots③$$

ここで，$f(t)=4t^3+12t^2-15t+4$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2+24t-15=3(2t+5)(2t-1)$$

よって，$f(t)$ の $0<t<1$ における増減は次のようになる．

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

このとき，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+3-\frac{15}{2}+4=0$

よって，$0<t<1$ において　$f(t)\geqq 0$

以上により，$0<t<1$ のとき，

$$A^2-3=\frac{f(t)}{9t}\geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad A\geqq\sqrt{3}$$

が成り立つ．（証明終了）

第２問

以下の問いに答えよ．必要ならば，$0.3<\log_{10}2<0.31$ であることを用いてよい．

(1)　$5^n>10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

(2)　$5^m+4^m>10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ．

(1)　$5^n>10^{19}$ について，両辺の常用対数をとると，

$$\log_{10}5^n>\log_{10}10^{19}$$

$$\therefore\quad n\log_{10}5>19 \quad \cdots\cdots①$$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2$ であるから，$0.3<\log_{10}2<0.31$ より，

$$1-0.31<\log_{10}5<1-0.3 \qquad \therefore\quad 0.69<\log_{10}5<0.7$$

よって，

$$\frac{19}{\log_{10}5}>\frac{19}{0.7}=27.14\cdots,\quad \frac{19}{\log_{10}5}<\frac{19}{0.69}=27.53\cdots$$

① より $n>\dfrac{19}{\log_{10}5}$ であるから，これを満たす最小の自然数 n は　$n=\mathbf{28}$

(2)　5^m+4^m は自然数 m について増加である．

また，(1) より $5^{28}>10^{19}$ であるから，$m=28$ のとき $5^{28}+4^{28}>10^{19}$ が成り立つ．

以下，$m=27$ のときについて調べる．

② より，　$\log_{10}5^{27}=27\log_{10}5<27\cdot0.7=18.9$

$0.3<\log_{10}2$ であるから，　$\log_{10}5^{27}<18.9=18+3\cdot0.3<18+3\log_{10}2=\log_{10}8\cdot10^{18}$

よって，　$5^{27}<8\cdot10^{18}$　$\cdots\cdots$③

同様に ② より，　$\log_{10}4^{27}=27\cdot2\log_{10}2=54\log_{10}2<54\cdot0.31=16.74$

$0.3<\log_{10}2$ であるから，　$\log_{10}4^{27}<16.74=16+0.9<16+3\log_{10}2=\log_{10}8\cdot10^{16}$

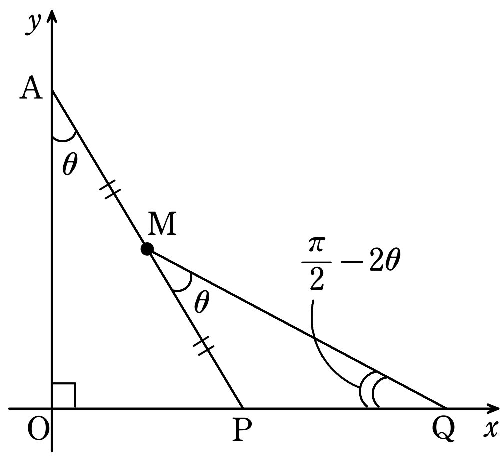
よって，　$4^{27}<8\cdot10^{16}$　$\cdots\cdots$④

③，④ より，

$$5^{27}+4^{27}<8\cdot10^{18}+8\cdot10^{16}=808\cdot10^{16}<1000\cdot10^{16}=10^{19}$$

したがって，$5^m+4^m>10^{19}$ となる最小の自然数 m は　$m=\mathbf{28}$

第３問



(1)　(ii) より $\angle \mathrm{OAP}=\angle \mathrm{PMQ}=\theta$ とおく．

$\mathrm{OA}=1$，$\angle \mathrm{OAP}=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$p=\mathrm{OP}=\mathrm{OA}\tan\theta=\tan\theta \quad \cdots\cdots ①$$

であり，$0<p<1$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ である．

$\angle \mathrm{OAP}+\angle \mathrm{AOP}+\angle \mathrm{PMQ}+\angle \mathrm{MQP}=\pi$ より，

$$\theta+\frac{\pi}{2}+\theta+\angle \mathrm{MQP}=\pi \qquad \therefore \quad \angle \mathrm{MQP}=\frac{\pi}{2}-2\theta$$

また，線分 AP の中点が M であるから，　$\mathrm{M}\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

よって，直線 MQ の方程式は，P

$$y=\left(x-\frac{p}{2}\right)\tan\left\{\pi-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{p}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{\tan 2\theta}\left(x-\frac{p}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

これと x 軸との交点が $(q,\ 0)$ であるから，

$$0=-\frac{1}{\tan 2\theta}\left(q-\frac{p}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad q=\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\tan 2\theta$$

$p=\tan\theta$ であるから，

$$q=\frac{p}{2}+\frac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{p}{2}+\frac{p}{1-p^2}=\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}$$

このとき，$0<p<1$ より

$$q-p=\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}-p=\frac{p(1+p^2)}{2(1-p^2)}>0$$

$$\therefore \quad q>p$$

となり，(i) を満たす．

以上より，　$q=\dfrac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}$

(2)　(1) より $q=\dfrac{1}{3}$ のとき，

$$\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}=\frac{1}{3}$$

$$3p^3-2p^2-9p+2=0$$

$$(p-2)(3p^2+4p-1)=0$$

$$\therefore \quad p=2,\ \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$$

$0<p<1$ であるから，$q=\dfrac{1}{3}$ となる p の値は　$p=\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$

(3)　$S=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot p=\frac{p}{2}$

また，△PMQ について，底辺を PQ とすると，高さは M の y 座標に等しいから，その面積は

$$T=\frac{1}{2}\cdot(q-p)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{p(1+p^2)}{2(1-p^2)}=\frac{p(1+p^2)}{8(1-p^2)}$$

よって，$S>T$ のとき，　$\frac{p}{2}>\frac{p(1+p^2)}{8(1-p^2)}$

$0<p<1$ であるから，

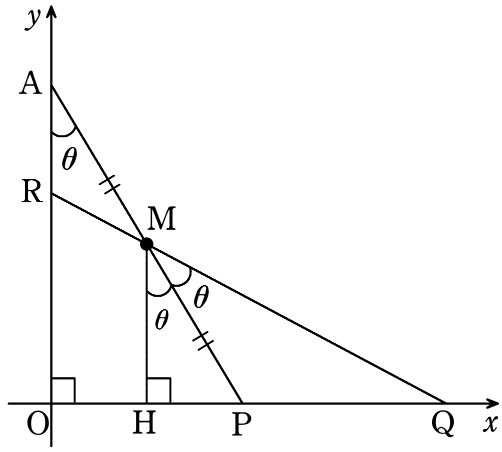
$$4(1-p^2)>1+p^2$$

$$5p^2-3<0 \qquad \therefore\quad -\frac{\sqrt{15}}{5}<p<\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$0<p<1$ との共通部分を考えると，求める p の範囲は

$$0<p<\frac{\sqrt{15}}{5}$$

別解　(1) の $q=\mathrm{OQ}$ は図形的に求めてもよい．



(ii) より $\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{PMQ}=\theta$ とおく．

$\mathrm{OA}=1$，$\angle\mathrm{OAP}=\frac{\pi}{2}$ より，

$$p=\mathrm{OP}=\mathrm{OA}\tan\theta=\tan\theta \quad \cdots\cdots①$$

であり，$0<p<1$ より $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ である．

また，線分 AP の中点が M であるから，　$\mathrm{M}\left(\frac{p}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

M から x 軸へ垂線 MH を下ろすと，AO∥MH より，

$$\angle\mathrm{PMH}=\angle\mathrm{PAO}=\theta$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{QMH}=\angle\mathrm{PMQ}+\angle\mathrm{PMH}=2\theta$$

このことと $\mathrm{MH}=\frac{1}{2}$ より，直角三角形 QMH において，

$$\mathrm{QH}=\mathrm{MH}\tan 2\theta=\frac{1}{2}\tan 2\theta=\frac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{p}{1-p^2}$$

したがって，$\mathrm{OH}=\frac{p}{2}$ より，　$q=\mathrm{OQ}=\mathrm{OH}+\mathrm{QH}=\frac{p}{2}+\frac{p}{1-p^2}=\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}$

第４問

$n=5$ のとき，正五角形の 5 個の頂点から異なる 4 点を選んでできる四角形は，必ず O を内部に含むので，

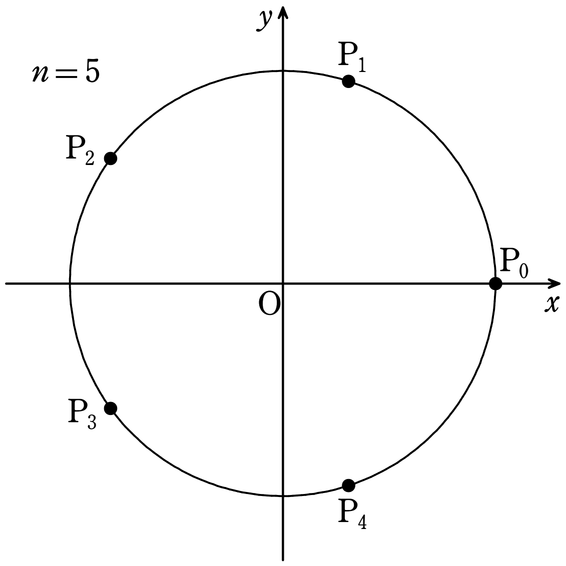
$$p_5=1$$

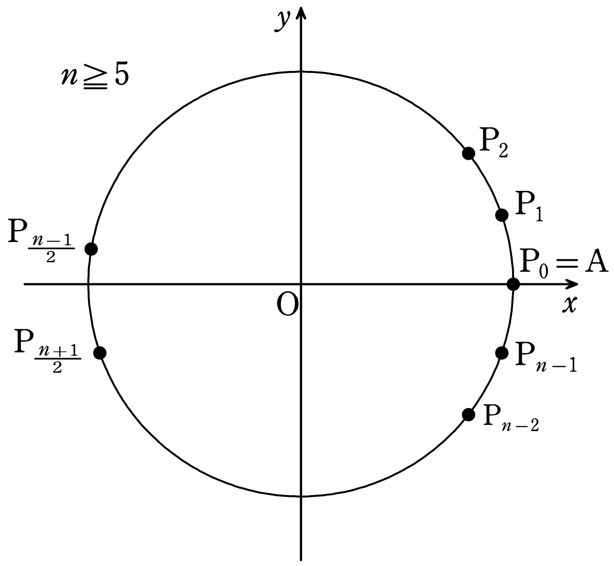
$n \geqq 5$ のとき，正 n 角形の n 個の頂点から異なる 4 点の選び方は ${}_n\mathrm{C}_4$ 通りであり，これらは同様に確からしい．

このとき選んだ 4 点を反時計回りに A，B，C，D とする．ただし，$\overset{\frown}{\mathrm{DA}}$ が他のどの弧よりも短くないように文字を割り当てることにする．

n は奇数であるから，正 n 角形の異なる 2 頂点を結んだ線分が直径となることはない．すなわち，四角形 ABCD の辺上に O があることはないから，四角形 ABCD が O を内部に含まない場合を考える．

円の半径が 1 で，A$(1,\ 0)$ であるとしても一般性は失われない．





このとき点 D は第 4 象限にはない．

次に，点 D が第 3 象限にあるとき，四角形 ABCD が O を内部に含まないのは，2 点 B，C が第 3 象限にあるときであるが，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}>\overset{\frown}{\mathrm{DA}}$ となり矛盾する．

したがって，四角形 ABCD が O を内部に含まないのは，3 点 B，C，D を第 1，2 象限の頂点から選ぶときである．

このとき，$\overset{\frown}{\mathrm{DA}}$ 以外の弧は $\overset{\frown}{\mathrm{DA}}$ よりも真に短いので，A，B，C，D の文字の割り当て方は一意である．

第 1，2 象限の頂点は $\dfrac{n-1}{2}$ 個あるから，ここから異なる 3 点の選び方は ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3$ 通り．

よって，四角形 ABCD が O を内部に含まない確率は，

$$\frac{{}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_4}=\frac{\dfrac{n-1}{2}\cdot\left(\dfrac{n-1}{2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{n-1}{2}-2\right)}{3\cdot 2}\times\frac{4\cdot 3\cdot 2}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$=\frac{n-5}{2(n-2)}$$

したがって，四角形 ABCD が O を内部に含む確率は，

$$1-\frac{n-5}{2(n-2)}=\boldsymbol{\frac{n+1}{2(n-2)}}$$

これは $n=5$ のときも成り立つ．