解答速報　数学

2024年度　東京慈恵会医科大学

【　講　評　】

例年と同様に，大問4題での出題であった．出題分野も確率，数学Ⅲ微分法・積分法，整数の性質，空間図形（空間座標）と変化がなく，対策ができていた人にとっては取り組みやすい試験であっただろう．解けるところを確実に解き，6割程度の得点を目指したい．以下，大問ごとに述べる．

１．確率【やや易】

番号のついた玉の取り出し方に関する条件付き確率の問題であった．場合分けも少なく，非常に解きやすい問題であったため，ここは確実に得点したい．

２．数学Ⅲ微分法・積分法【標準】

絶対値関数の定積分の最大・最小値を求める典型問題であった．設問による誘導もあったため，場合分けにも気づきやすかっただろう．やや計算が煩雑であるが，ここは少し時間をかけてでも正確に解き切りたい．

３．整数の性質【やや難】

(1) は2次多項式の係数に関する式が整数であるかどうかを示す問題であった．条件式を適切に変形し，p，q が互いに素な自然数であることを利用する．整数値多項式の問題を解いた経験がある人にとってはやや解答しやすかったであろう．(2) は (1) の証明過程に注目して，反例を見つけるだけである．(1) で差がつきそうな問題である．

４．空間図形／数学Ⅲ積分法（体積）【やや難】

空間座標内の円板の回転体の体積を求める問題であった．図形，座標，ベクトルを用いて，断面積を正確に求めて定積分するだけであるが，類題を解いた経験が結果を大きく左右するだろう．(1) だけでも正解しておきたい．

【　解　答　】

１．（ア）$\dfrac{1}{18}$，　（イ）$\dfrac{2}{9}$

２．(1)　$1<a<\dfrac{3}{2}$ のとき０個，$\dfrac{3}{2}\leqq a<2$ のとき１個

(2)　$S(a)=\begin{cases} 3\log 3-4\log 2-\log a & \left(1<a<\dfrac{3}{2}\right) \\ 5\log a-2\log(a-1)-3\log 3 & \left(\dfrac{3}{2}\leqq a<2\right) \end{cases}$,

(3)　$a=\dfrac{5}{3}$ のとき，最小値 $5\log 5-2\log 2-6\log 3$

３．解説参照

４．　(1)　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　(2)　$V=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

【　解　説　】

1.

取り出した3個の玉が，赤玉2個，白玉1個であるような取り出し方は，

$${}_3C_2\times{}_3C_1\times 3!=2\cdot 3^3 \text{ 通り}$$

であり，これらは同様に確からしい．

(ア)　上の条件のもとで，$a_1<a_2<a_3$ となるのは$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 3)$ のときのみである．

どれを白玉にするかを考えると，　${}_3C_1=3$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{2\cdot 3^3}=\dfrac{1}{2\cdot 3^2}=\mathbf{\dfrac{1}{18}}_{(ア)}$

(イ)　上の条件のもとで，取り出した3個の玉が，赤玉2個，白玉1個であるとき，$a_1<a_2$ かつ $a_2>a_3$ となるのは次の2通りである．

(Ⅰ)　$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 1)$，$(1,\ 3,\ 1)$，$(2,\ 3,\ 2)$ のとき

$a_1=a_3$ は赤玉，白玉が1個ずつで，a_2 は赤玉となるので，a_1 と a_3 のどちらを赤玉にするかを考えて，

$3\cdot{}_2C_1=3\cdot 2$ 通り

(Ⅱ)　$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 3,\ 2)$，$(2,\ 3,\ 1)$ のとき

各数字のどれを白玉とするかを考えて，

$2\cdot{}_3C_1=2\cdot 3$ 通り

したがって，求める確率は，　$\dfrac{3\cdot 2+2\cdot 3}{2\cdot 3^3}=\dfrac{1+1}{3^2}=\mathbf{\dfrac{2}{9}}_{(イ)}$

別解　余事象を用いてもよい．

取り出した3個が赤玉2個，白玉1個であるとき，$a_1<a_2$ となる取り出し方は，

a_1，a_2 がともに赤玉であるとき，a_3 は白玉となるから，　${}_3C_2\times 3=9$ 通り

a_1，a_2 が赤玉と白玉であるとき，a_3 は赤玉となるから，　${}_3C_2\times 2\times 2=12$ 通り

であるから，

$9+12=21$ 通り

また，取り出した3個が赤玉2個，白玉1個であるとき，$a_1<a_2$ かつ $a_2\leqq a_3$ となる取り出し方は

(ⅰ) $a_1<a_2<a_3$ のとき

(ア) より 3通り

(ⅱ) $a_1<a_2=a_3$ のとき

2つの数字の選び方と，どちらに白玉を含むかを考えると，　${}_3C_2\times{}_2C_1=6$ 通り

であるから，

$3+6=9$ 通り

したがって，取り出した3個が赤玉2個，白玉1個であるとき，$a_1<a_2$ かつ $a_2>a_3$ となる取り出し方は，

$21-9=12$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{12}{2\cdot 3^3}=\mathbf{\dfrac{2}{9}}_{(イ)}$

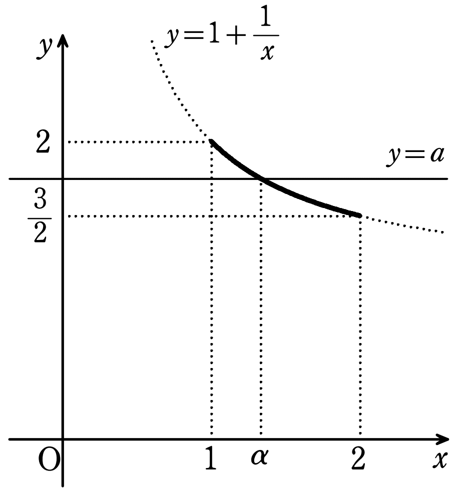
２．

(1)　$1<a<2$，$1\leqq x\leqq 2$ より真数条件は満たされている．

方程式を変形すると，　$\log(1+x)=\log ax$

y と $\log y$ は一対一に対応するから，

$$1+x=ax \quad \cdots\cdots① \qquad \therefore \quad a=\frac{1+x}{x}=1+\frac{1}{x}$$



この方程式の解の個数は，$y=1+\dfrac{1}{x}$ と $y=a$ の共有点の個数に等しい．

$y=1+\dfrac{1}{x}$ は $1\leqq x\leqq 2$ において単調減少で，

$x=1$ のとき　$y=1+\dfrac{1}{1}=2$，

$x=2$ のとき　$y=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

であるから，方程式の解の個数は，

$1<a<\dfrac{3}{2}$ のとき，解は 0 個，$\dfrac{3}{2}\leqq a<2$ のとき，解は 1 個

また，$\dfrac{3}{2}\leqq a<2$ のとき，① を解くと　$(a-1)x=1$　　$\therefore$　$x=\dfrac{1}{a-1}$ ($=\alpha$ とおく)

(2)　$S(a)=\displaystyle\int_1^2 |\log(1+x)-\log ax|\,dx$

$f(x)=\log(1+x)-\log ax$ とおくと，

$$\int\{\log(1+x)-\log ax\}\,dx=\int\{\log(1+x)-\log x-\log a\}\,dx$$
$$=(1+x)\log(1+x)-x-(x\log x-x)-x\log a+C$$
$$=(1+x)\log(1+x)-x\log x-x\log a+C$$

$F(x)=(1+x)\log(1+x)-x\log x-x\log a$ とおくと，

$F(1)=2\log 2-\log a$，

$F(2)=3\log 3-2\log 2-2\log a$，

$$F\left(\frac{1}{a-1}\right)=\frac{a}{a-1}\log\left(\frac{a}{a-1}\right)-\frac{1}{a-1}\log\left(\frac{1}{a-1}\right)-\frac{1}{a-1}\log a$$
$$=\frac{a}{a-1}\log\left(\frac{a}{a-1}\right)-\frac{1}{a-1}\log\left(\frac{a}{a-1}\right)$$
$$=\log\left(\frac{a}{a-1}\right)$$

(ｉ) $1<a<\dfrac{3}{2}$ のとき

(1) より $1\leqq x\leqq 2$ において，　$a<1+\dfrac{1}{x}$　　$\therefore$　$f(x)>0$

よって，　$S(a)=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_1^2$

$$=F(2)-F(1)$$
$$=3\log 3-2\log 2-2\log a-(2\log 2-\log a)$$
$$=3\log 3-4\log 2-\log a$$

(ⅱ) $\dfrac{3}{2} \leqq a < 2$ のとき

(1) より $1 \leqq x \leqq 2$ において,

$$1 \leqq x \leqq \alpha \text{ のとき} \quad a \leqq 1+\frac{1}{x} \qquad \therefore \quad f(x) \geqq 0,$$

$$\alpha \leqq x \leqq 2 \text{ のとき} \quad a \geqq 1+\frac{1}{x} \qquad \therefore \quad f(x) \leqq 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^\alpha f(x)\,dx - \int_\alpha^2 f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_1^\alpha - \Big[F(x)\Big]_\alpha^2 \\ &= F(\alpha) - F(1) - F(2) + F(\alpha) \\ &= 2F(a) - F(1) - F(2) \\ &= 2\log\left(\frac{a}{a-1}\right) - (2\log 2 - \log a) - (3\log 3 - 2\log 2 - 2\log a) \\ &= 5\log a - 2\log(a-1) - 3\log 3 \end{aligned}$$

以上より,

$$S(a) = \begin{cases} 3\log 3 - 4\log 2 - \log a & \left(1 < a < \dfrac{3}{2}\right) \\ 5\log a - 2\log(a-1) - 3\log 3 & \left(\dfrac{3}{2} \leqq a < 2\right) \end{cases}$$

(3) $1 < a < \dfrac{3}{2}$ のとき, $S(a) = 3\log 3 - 4\log 2 - \log a$ は単調減少関数である.

$\dfrac{3}{2} \leqq a < 2$ のとき $S'(a) = \dfrac{5}{a} - \dfrac{2}{a-1} = \dfrac{3a-5}{a(a-1)}$

よって, $S(a)$ の $1 < a < 2$ における増減は次のようになる.

a	1		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		2
$S'(a)$		$-$		$-$		$+$	
$S(a)$		↘		↘		↗	

このとき,

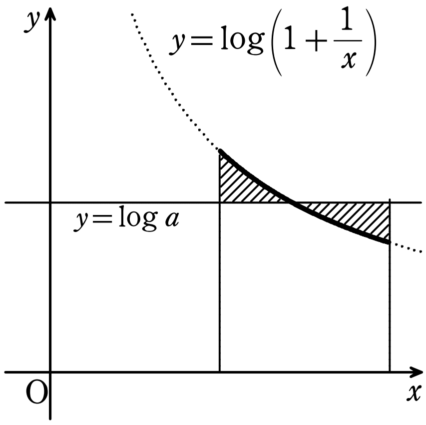
$$S\left(\frac{5}{3}\right) = 5\log\frac{5}{3} - 2\log\frac{2}{3} - 3\log 3 = 5\log 5 - 2\log 2 - 6\log 3$$

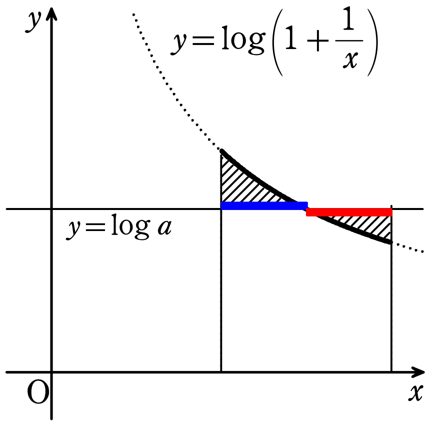
以上より, $S(a)$ は $a = \dfrac{5}{3}$ のとき, 最小値 $\mathbf{5\log 5 - 2\log 2 - 6\log 3}$ をとる.

参考

$$S(a)=\int_1^2|\log(1+x)-\log ax|\,dx$$
$$=\int_1^2|\log(1+x)-\log a-\log x|\,dx$$
$$=\int_1^2\left|\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\log a\right|\,dx$$

よって，$S(a)$ は $y=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$，$y=\log a$，$x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を表す.





いわゆる「はみ出し削り論法」により，この面積が最小となるのは，$y=\log a$ を下げたときに増加する面積（青色）と減少する面積（赤色）がちょうどつりあうとき，すなわち，$y=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 上の $x=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$ における点を $y=\log a$ が通るときであるから，

$$\log a=\log\left(1+\frac{2}{3}\right)=\log\frac{5}{3}\qquad\therefore\quad a=\frac{5}{3}$$

のときであることがわかる.

３．

(1)　条件から，ある整数 k について，

$$f(k-1)=a(k-1)^2+b(k-1)+c \quad \cdots\cdots①$$

$$f(k)=ak^2+bk+c \quad \cdots\cdots②$$

$$f(k+1)=a(k+1)^2+b(k+1)+c \quad \cdots\cdots③$$

はいずれも整数である．

①－② より，

$$-2ak+a-b=f(k-1)-f(k) \quad \cdots\cdots④$$

③－② より

$$2ak+a+b=f(k+1)-f(k) \quad \cdots\cdots⑤$$

④＋⑤ より，

$$2a=f(k-1)-2f(k)+f(k+1) \quad \cdots\cdots⑥$$

$f(k-1)$，$f(k)$，$f(k+1)$ は整数であるから，$2a$ は整数である．

また，⑤－④ より，

$$2b+4ak=f(k+1)-f(k-1)$$

a，$f(k+1)$，$f(k-1)$ は整数であるから，$2b$ も整数である．

これらのことと，② より

$$2f(k)=2ak^2+2bk+2c$$

であることから，$2c$ も整数であることがわかる．

ここで，２次多項式 $f(x)$ が $px-q$ で割り切れることから，

$$f\left(\frac{q}{p}\right)=a\left(\frac{q}{p}\right)^2+b\left(\frac{q}{p}\right)+c=0$$

$$aq^2+bpq+cp^2=0$$

$$2aq^2+2bpq+2cp^2=0 \quad \cdots\cdots⑦$$

$$\therefore \quad 2aq^2=p(-2pq-2cp)$$

が成り立つ．

$-2pq-2cp$ は整数であるから右辺は p の倍数であり，p と q は互いに素な自然数であるから，

整数 $2a$ は p の倍数である．したがって，$\dfrac{2a}{p}$ は整数である．

同様に，⑦ より

$$2cp^2=q(-2aq-2bp)$$

が成り立つから，$2c$ は q の倍数，すなわち $\dfrac{2c}{q}$ は整数である．　(証明終)

(2) $\dfrac{a}{p}$, $\dfrac{c}{q}$ が整数であるためには, p が整数であることから, a が整数である必要がある.

(1) の⑥より,

$$a=\frac{f(k-1)+f(k+1)}{2}-f(k)$$

$f(k-1)$, $f(k+1)$, $f(k)$ は整数であるから, a が整数となるのは, $f(k-1)$, $f(k)$ の偶奇が一致するときである.

$f(k-1)$, $f(k)$ の偶奇が一致しない場合として, $k=0$ のとき,

$$\begin{cases} f(k-1)=f(-1)=a-b+c=1 \\ f(k)=f(0)=c=0 \\ f(k+1)=f(1)=a+b+c=0 \end{cases}$$

とすると, これを満たすのは,

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{2},\quad c=0$$

このとき, $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+0=\dfrac{1}{2}x(x-1)$

よって, 2 次多項式 $f(x)$ は $x-1$ で割り切れる.

$p=1$, $q=1$ であるから p, q は互いに素な自然数であり, 条件を満たすが,

$$\frac{a}{p}=\frac{1}{2}$$

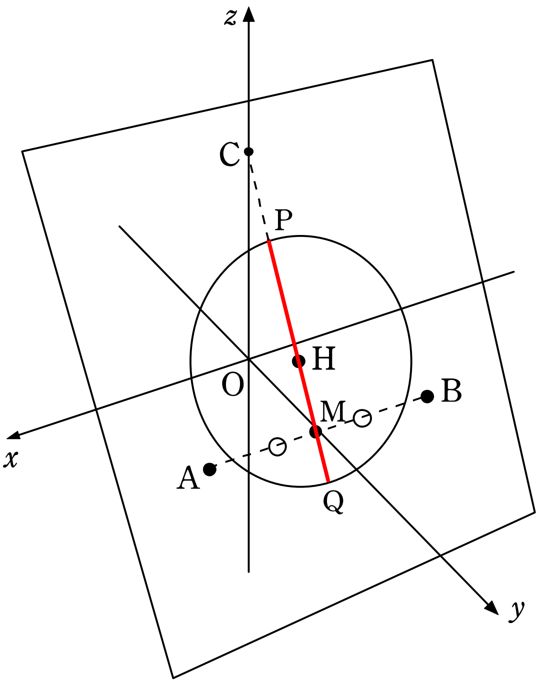
は整数でない.

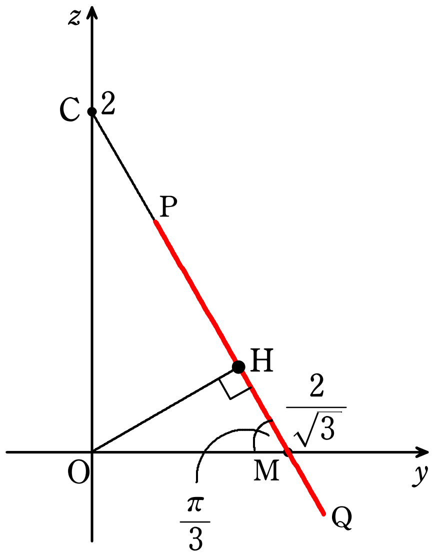
以上より, 命題は偽であり, その反例は

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x(x-1),\text{ すなわち }\quad a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ c=0,\ p=1,\ q=1$$

4.

(1)　2 点 A，B は yz 平面について対称であり，点 C は z 軸上にあるから，O から平面 ABC へ下した垂線の足 H は yz 平面上にある．線分 AB の中点 を $\mathrm{M}\left(0,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ とし，3 点 O，M，C を含む yz 平面に注目する．





$\mathrm{OM}:\mathrm{OC}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}:2=1:\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{MOC}=\dfrac{\pi}{2}$ より，　$\angle\mathrm{OMC}=\dfrac{\pi}{3}$

よって，　$\mathrm{OH}=\mathrm{OM}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$

H は yz 平面上の点で，$\angle\mathrm{MOH}=\dfrac{\pi}{6}$ であるから，　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(0,\ \cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

円板 D の境界線と yz 平面の交点のうち，z 座標が大きいものを P，小さいものを Q とすると，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}\right|=1$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\left(0,\ \cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)=\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HQ}}=\left(0,\ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)+\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HQ}}=\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)+\left(0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

以上より，平面 $z=t$ が円板 D と yz 平面との共通部分に交わるような t の値の範囲は，

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\cdots\cdots①$$

$x\fallingdotseq 0$ のとき，z が ① の範囲外にあるような D と同一平面上の点は，H との距離が 1 を超えるので，D の外部となる．よって，① が D と $z=t$ が交わる必要十分条件であるとわかる．

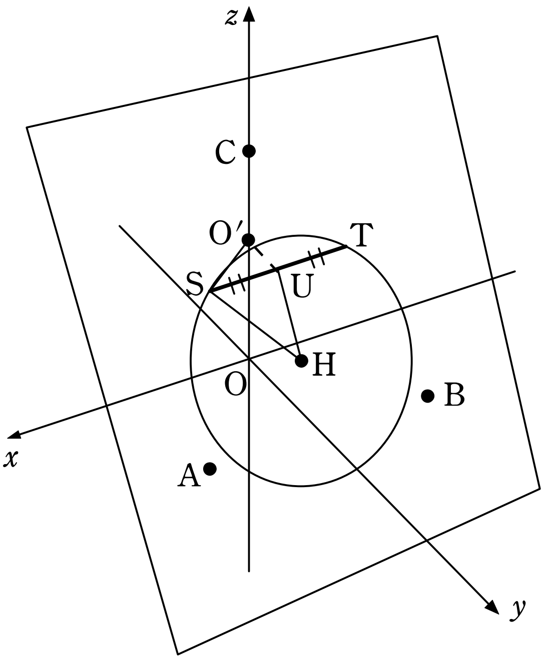
(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とする．

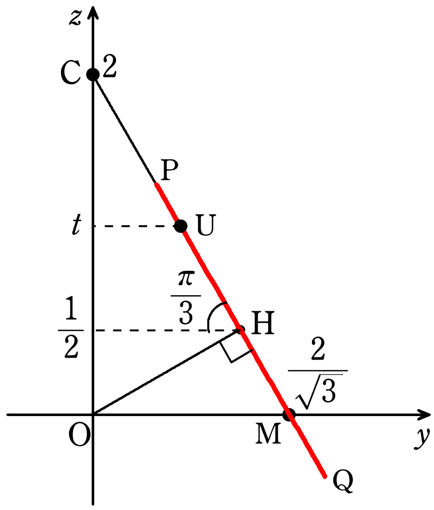
円板 D は yz 平面に関して対称であるから，平面 $z=t$ と円板 D の交線は yz 平面に関して対称な線分である．
この線分の両端を S，T とする．線分 ST を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形の面積が，立体 K の平面 $z=t$ による断面の面積である．この面積を $S(t)$ とする．

O$'(0,\ 0,\ t)$，線分 ST の中点を U とすると，

$$S(t)=\pi(\mathrm{O'S}^2-\mathrm{O'U}^2)$$
$$=\pi\mathrm{SU}^2 \quad (\because\ \triangle\mathrm{O'SU}\text{ において三平方の定理})$$
$$=\pi(\mathrm{HS}^2-\mathrm{HU}^2)$$

ここで，U の z 座標が t，H の z 座標が $\dfrac{1}{2}$ であることから，　$\mathrm{HU}=\dfrac{\left|t-\dfrac{1}{2}\right|}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left|t-\dfrac{1}{2}\right|$





したがって，

$$S(t)=\pi\left\{1^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left|t-\frac{1}{2}\right|\right)^2\right\}$$
$$=-\frac{4}{3}\pi\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right\}$$
$$=-\frac{4}{3}\pi\left\{t-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{t-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，立体 K の体積は，

$$\int_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} S(t)\,dt=-\frac{4}{3}\pi\int_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{t-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{t-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}dt$$
$$=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$

別解　ベクトルを用いて機械的に処理を行うこともできる．

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(-1,\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ 2\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(1,\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ 2\right)$ であるから，$\vec{n}=(0,\ \sqrt{3},\ 1)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{n}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\neq\vec{0}$，$\vec{n}\neq\vec{0}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\vec{n}$ である．

よって，平面 ABC の方程式は，

$$0\cdot(x-0)+\sqrt{3}\cdot(y-0)+1\cdot(z-2)=0 \qquad \therefore\quad \sqrt{3}y+z=2 \quad \cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}/\!/\vec{n}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{n}=(0,\ \sqrt{3}k,\ k)$$

となる実数 k が存在する．H は平面 ABC 上にあるから，① に代入して，

$$\sqrt{3}(\sqrt{3}k)+k=2 \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{2}$$

よって，　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\vec{n}=\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

ここで，$\vec{u}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{v}=(0,\ -1,\ \sqrt{3})$ とおくと，

$$\vec{n}\perp\vec{u},\quad \vec{n}\perp\vec{v},\quad \vec{u}\perp\vec{v}$$

であるから，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は平面 ABC 上の直交するベクトルである．

よって，円板 D 上の点を P とすると，ある実数 $r\,(0\leqq r\leqq 1)$，$\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ が存在して，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+r\left(\vec{u}\cos\theta+\frac{1}{2}\vec{v}\sin\theta\right)\\&=\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)+(1,\ 0,\ 0)\cdot r\cos\theta+\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot r\sin\theta\\&=\left(r\cos\theta,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}r\sin\theta,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta\right)\end{aligned}$$

したがって，平面 $z=t$ が円板 D と交わるのは，$t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta$ を満たす実数 $r\,(0\leqq r\leqq 1)$，$\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ が存在するときである．

r を固定し θ を $0\leqq\theta<2\pi$ で変化させると，

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}r\cdot(-1)\leqq t\leqq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}r\cdot 1 \qquad \therefore\quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}r\leqq t\leqq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

次に r を $0\leqq r\leqq 1$ で変化させると，

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\leqq t\leqq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2)　円板 D 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ が，$z=t$ との交線上に存在するとき，

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}r\sin\theta\\ t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta\end{cases} \iff \begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}r\sin\theta\\ r\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

を満たす実数 $r\,(0\leqq r\leqq 1)$，$\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ が存在する．

この点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ と $\mathrm{O}'(0,\ 0,\ t)$ との距離を R とすると，

$$R^2=x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}r\sin\theta\right)^2$$
$$=r^2\left\{1-\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right\}+\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$
$$=r^2-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}$$
$$=r^2+1-t^2$$

ここで，実数 t，$r\,(0\leqq r\leqq 1)$ に対して，$t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta$ を満たす θ が $0\leqq\theta<2\pi$ に存在するとき，

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}r\leqq t\leqq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}r \iff \frac{1}{\sqrt{3}}|2t-1|\leqq r\leqq 1$$

したがって，　$\dfrac{1}{3}(2t-1)^2\leqq r^2\leqq 1$　　$\therefore\ \dfrac{1}{3}(2t-1)^2+1-r^2\leqq R^2\leqq 1^2+1-r^2$

以上より，立体Kの平面 $z=t$ による断面の面積は，

$$\pi(1^2+1-r^2)-\pi\left\{\frac{1}{3}(2t-1)^2+1-r^2\right\}=\pi\left\{1-\frac{1}{3}(2t-1)^2\right\}$$

であるから，求める体積は，

$$\int_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi\left\{1-\frac{1}{3}(2t-1)^2\right\}dt=\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{s^2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\,ds \qquad (2t-1=s \text{ と置換した})$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{s^2}{3}\right)ds=\pi\left[s-\frac{s^3}{9}\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$=\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$