解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　順天堂大学

【　講　評　】

例年通り，大問３題で出題された．大問１が３題からなる小問集合である点や，大問３が記述式で証明を含む問題である点も変更がなかった．全体的に誘導が親切な問題が多く，また計算量も少なかったため，解きやすくなった印象である．70% 以上の得点を目指したい．以下，大問ごとに特徴を述べる．

Ⅰ　小問集合

(1)　積分法（数Ⅲ）【やや易】

定積分に関する問題であった．誘導に従って計算していけばよい．(b) は (a) をヒントに計算するだけである．計算量も多くないため，ここは落とせない．

(2)　確率【標準】

サイコロに関する典型的な確率の問題であった．難易度も標準的であるから，確実に得点したい問題である．

(3)　数列の極限【標準】

無限等比級数に関する問題であった．標準的な難易度であるが，計算量が多いため，効率的に処理できたかがポイントとなる．順天堂大学では頻出なテーマであるため，対策できていたかどうかで明暗が分かれるだろう．

Ⅱ　ベクトル【標準】

平面ベクトルの問題であった．前半は五角形が題材となっており，やや計算量が多いが，図形も複雑でなく，丁寧な誘導があるので，それにしたがって解き進めるだけである．後半は前半で考察した五角形を連ねた図形となり，問題文の図に圧倒されてしまった人は少なくないだろう．図形の対称性に注目して冷静に解き進められたかが鍵となる．出来不出来がわかれそうな問題である．

Ⅲ　いろいろな関数／数列／微分法（数Ⅲ）／積分法（数Ⅲ）【標準】

(1) は逆関数の計算問題，(2)，(3) は数列和の計算問題で，いずれも標準的なものであるため，確実に得点したい．(4) は証明問題となっているが，式が表すものを図形的にとらえて面積の大小関係を用いるか，平均値の定理を用いることになる．やや解きづらい問題であるため，ここは得点しきれなくてもよいだろう．

【　解　答　】

$\boxed{1}$ (1)(a)　ア : 1，イ : 4，ウ : 1，エ : 2，オ : 2，カ : 1，キ : 8，ク : 1，ケ : 4，コ : 2，

(b)　サ : 3，シ : 2，ス : 6，セ : 2，ソ : 1，タ : 3，チ : 1，ツ : 5，テ : 1，ト : 6，ナ : 1，ニ : 1，ヌ : 3，
ネ : 3，ノ : 1，ハ : 3，ヒ : 1，フ : 5，ヘ : 1，ホ : 6

(2)　(a)　ア : 6，イ : 2，ウ : 5，エ : 1，オ : 2，カ : 9，キ : 6，

(b)　ク : 6，ケ : 7，コ : 1，サ : 1，シ : 2，ス : 9，セ : 6，

(c)　ソ : 1，タ : 1，チ : 1，ツ : 2，テ : 9，ト : 6，

(d)　ナ : 2，ニ : 2，ヌ : 7，

(3)　(a)　ア : 3，　(b)　イ : 1，ウ : 2，　(c)　エ : 9，オ : 8，

$\boxed{2}$ (a)　ア : 3，イ : 4，ウ : 4，エ : 7，オ : 7，

(b)　カ : 7，キ : 4，ク : 3，ケ : 7，コ : 3，サ : 4，シ : 3，ス : 7　セ : 7，ソ : 6，タ : 1，チ : 7，ツ : 6，
テ : 7，ト : 7，ナ : 6

(c)　ニ : 1，ヌ : 7，ネ : 3，ノ : 7，ハ : 7，ヒ : 3，フ : 4，ヘ : 7，ホ : 0，マ : 4，ミ : 7，ム : 2

$\boxed{3}$ (1)　$a_2=3$，$a_3=8$　　(2)　$\frac{1}{6}(n-1)n(4n+1)$　　(3)(4)　解説参照

【 解 説 】

1

(1)(a) $A+B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{4}\pi$ (アイ) ……①

また，$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}\,dx$

$=\Big[\log|\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\log\sqrt{2}-\log 1=\dfrac{1}{2}\log 2$ (ウエオ) ……②

①＋② より $2A=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\log 2$ $\therefore$ $A=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\log 2$ (カキクケコ)

①－② より $2B=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$ $\therefore$ $B=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\log 2$

(b) $3C+2D=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\sin x+3\cos x+13}{2\sin x+3\cos x+13}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$ ……③

また，$2C-3D=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x+13}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{(2\sin x+3\cos x+13)'}{2\sin x+3\cos x+13}\,dx$

$=\Big[\log|2\sin x+3\cos x+13|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\log 15-\log 16=\log\dfrac{15}{16}$ ……④

③×3＋④×2 より $13C=\dfrac{3}{2}\pi+2\log\dfrac{15}{16}$ $\therefore$ $C=\dfrac{3}{26}\pi+\dfrac{2}{13}\log\dfrac{15}{16}$ (サシスセソタチツテト)

③×2－④×3 より $13D=\pi-3\log\dfrac{15}{16}$ $\therefore$ $D=\dfrac{\pi}{13}-\dfrac{3}{13}\log\dfrac{15}{16}$ (ナニヌネノハイフヘホ)

(2)(a) 1回目は任意の目が出て，2回目以降は直前に出た目以外の目が出ればよいから，

$\dfrac{6\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}{6^5}=\dfrac{5^4}{6^4}=\dfrac{625}{1296}$ (アイウエオカキ)

(b) 同じ目が2回以上続けて出ることの余事象は，同じ目が続けて出ないことであるから，(a) より，

$1-\dfrac{625}{1296}=\dfrac{671}{1296}$ (クケコサシスセ)

(c) 同じ目が5回続けて出る確率は，$\dfrac{6\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}{6^5}=\dfrac{1}{6^4}$

同じ目が4回だけ続けて出るとき，4回続けて出る目の選び方が6通り，残り1つの目の選び方が5通りで，

1回目から4回目で続く場合と，2回目から5回目で続く場合があるから，その確率は，$\dfrac{6\cdot5\cdot2}{6^5}=\dfrac{10}{6^4}$

よって，求める確率は $\dfrac{1+10}{6^4}=\dfrac{11}{1296}$ (ソタチツテト)

(c)　同じ目が3回だけ続けて出るのは，何回目から始まるかに注目すると，

　1回目から3回目で続くとき，4回目は3回目までと異なる目，5回目は任意の目が出るから，　$6\cdot5\cdot6$ 通り

　2回目から4回目で続くとき，1回目と5回目は2回目から4回目までと異なる目が出るから，　$6\cdot5\cdot5$ 通り

　3回目から5回目で続くとき，1回目は任意の目，2回目は3回目以降と異なる目が出るから，　$6\cdot5\cdot6$ 通り

であるから，その確率は

$$\frac{6\cdot5\cdot6+6\cdot5\cdot5+6\cdot5\cdot6}{6^5}=\frac{30+25+30}{6^4}=\frac{85}{6^4}$$

よって，同じ目が3回以上続けて出る確率は，(b) とあわせて，

$$\frac{11}{6^4}+\frac{85}{6^4}=\frac{96}{6^4}=\mathbf{\frac{2}{27}}_{(ナニヌ)}$$

(3)　$a_n=\sum_{k=0}^{n}b^{n-k}c^k=b^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{c}{b}\right)^k$

$\frac{c}{b}\neq1$ のとき，　$a_n=b^n\cdot\dfrac{1-\left(\frac{c}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{c}{b}}=\dfrac{b^{n+1}-c^{n+1}}{b-c}$　……①

(a)　$b=3$，$c=-2$ のとき，① より

$$a_5=\frac{3^6-(-2)^6}{3-(-2)}=\frac{729-64}{5}=133=5\cdot26+3$$

よって，a_5 を5で割った余りは $\mathbf{3}_{(ア)}$ である．

(b)　$b=\frac{1}{2}$，$c=-\frac{1}{3}$ のとき，① より，

$$a_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{6}{5}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$$

$\left|\frac{1}{2}\right|<1$，$\left|-\frac{1}{3}\right|<1$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{6}{5}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\right\}=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}_{(イウ)}$$

(c)　$b=\frac{1}{2}$，$c=-\frac{1}{3}$ のとき，(b) より　$na_n=\frac{6}{5}\left\{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$

ここで，$S=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$ $(|x|<1)$ とおくと，

$S=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$　……①

$xS=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$　……②

①−② より

$$(1-x)S=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-2}+x^{n-1}-nx^n$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$
$$\therefore\quad S=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{x-1}$$

$\lim_{n\to\infty} S=S(x)$ とおくと，$|x|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} x^n=\lim_{n\to\infty} nx^n=0$ であるから，

$$S(x)=\frac{1-0}{(1-x)^2}-\frac{0}{x-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n=\sum_{n=!}^{\infty}\frac{6}{5}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^z$$
$$=\frac{6}{5}\left\{\frac{1}{4}\cdot S\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{9}\cdot S\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{6}{5}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}\right\}$$
$$=\frac{6}{5}\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{9}{8}{}_{(エオ)}$$

別解(a)　合同式を用いてもよい．

以下の合同式は mod 5 とする．$a=3$，$b=-2$ のとき，

$$a_5=\sum_{k=0}^{5}3^{5-k}(-2)^k\equiv\sum_{k=0}^{5}(-2)^{5-k}\cdot(-2)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{5}(-2)^5=6\cdot(-2)^5$$
$$=6\cdot(-32)\equiv1\cdot3=3$$

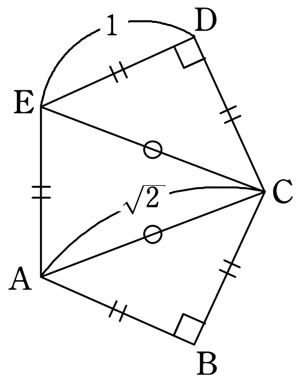
よって，a_5 を 5 で割った余りは 3 である．

別解(c)　$S=\sum_{n=1}^{n}kx^{k-1}$ は次のように計算することもできる．

$$S=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(x^k)'=\left\{\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right\}'$$
$$=\frac{\{1\cdot(1-x^n)-nx^n\}(1-x)-x(1-x^n)\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{\{1-(n+1)x^n\}(1-x)+x-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

2

(a)　AB＝BC＝1，CD＝DE＝1，$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{CDE}=\dfrac{\pi}{2}$ より，



△ABC，△CDE は直角二等辺三角形であるから，

$$\mathrm{AC}=\mathrm{CE}=\sqrt{2}$$

△ACE に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle \mathrm{ACE}=\frac{2+2-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\ (アイ)$$

$0<\angle \mathrm{ACE}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\sin\angle \mathrm{ACE}=\sqrt{1-\cos^2\angle \mathrm{ACE}}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

五角形 ABCDE の面積は，△ABC，△ACE，△CDE の面積の和であり，△ABC≡△CDE であるから，

$$2\times\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{4+\sqrt{7}}{4}\ (ウエオ)$$

(b)　$\cos\angle \mathrm{BCD}=\cos\left(\angle \mathrm{ACE}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\angle \mathrm{ACE}=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

よって，　$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\angle \mathrm{BCD}=1\cdot1\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ (カキ)

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=s\vec{p}+t\vec{q}$ について，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})=0$$

$$\vec{p}\cdot(s\vec{p}+t\vec{q})-|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=0$$

$$s|\vec{p}|^2+t\vec{p}\cdot\vec{q}-1^2=0$$

$$s\cdot1^2+t\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)-1=0\qquad\therefore\quad s-1=\frac{\sqrt{7}}{4}t\quad\cdots\cdots①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=1$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=1$$

$$|(s-1)\vec{p}+t\vec{q}|^2=1$$

$$(s-1)|\vec{p}|^2+2(s-1)t\vec{p}\cdot\vec{q}+t^2|\vec{q}|^2=1$$

$$(s-1)^2\cdot1^2+2(s-1)t\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)+t^2\cdot1^2=1$$

$$(s-1)^2-\frac{\sqrt{7}}{2}(s-1)t+t^2=1\quad\cdots\cdots②$$

① を ② に代入すると，

$$\frac{7}{16}t^2-\frac{7}{8}t^2+t^2=1$$

$$t^2=\frac{16}{9}\qquad\therefore\quad t=\pm\frac{4}{3}$$

① より $s=1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}t$ であるから，　$(s,\ t)=\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{3},\ \dfrac{4}{3}\right),\ \left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}>0$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{q}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})=\vec{q}\cdot\{(s-1)\vec{p}+t\vec{q}\}>0$$

$$(s-1)\vec{p}\cdot\vec{q}+t|\vec{q}|^2>0$$

$$(s-1)\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)+t\cdot1^2>0 \qquad \therefore\quad t>\frac{\sqrt{7}}{4}(s-1)$$

これを満たすのは $s=\mathbf{\dfrac{3+\sqrt{7}}{3}}_{(クケコ)}$，$t=\mathbf{\dfrac{4}{3}}_{(サシ)}$ であるから，　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3}\vec{p}+\dfrac{4}{3}\vec{q}$

五角形 ABCDE は CM に関して対称であるから，　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{4}{3}\vec{p}+\dfrac{3+\sqrt{7}}{3}\vec{q}$

よって，　$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7+\sqrt{7}}{3}\vec{p}+\dfrac{7+\sqrt{7}}{3}\vec{q}\right)=\mathbf{\dfrac{7+\sqrt{7}}{6}}(\vec{p}+\vec{q})_{(スセソ)}$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\vec{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{6}(\vec{p}+\vec{q})$$

$$=-\mathbf{\frac{1+\sqrt{7}}{6}}\vec{p}-\mathbf{\frac{7+\sqrt{7}}{6}}\vec{q}_{(タチツテトナ)}$$

(c)　五角形はいずれも合同であるから，　$\triangle\mathrm{ABM}\equiv\triangle\mathrm{E'BM'}$

A, B, E′ が一直線上にあることから，M, B, M′ も一直線上にあり， MB＝M′B であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}=2\overrightarrow{\mathrm{MB}}=-\mathbf{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}\vec{p}-\mathbf{\frac{7+\sqrt{7}}{3}}\vec{q}_{(ニヌネノハヒ)}$$

$$=-\frac{1+\sqrt{7}}{3}(\vec{p}+\sqrt{7}\vec{q})$$

また，

$$|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}|^2=\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2|\vec{p}+\sqrt{7}\vec{q}|^2$$

$$=\frac{8+2\sqrt{7}}{9}(|\vec{p}|^2+2\sqrt{7}\vec{p}\cdot\vec{q}+7|\vec{q}|^2)$$

$$=\frac{8+2\sqrt{7}}{9}\left\{1^2+2\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)+7\cdot1^2\right\}$$

$$=\frac{8+2\sqrt{7}}{9}\cdot\frac{9}{2}=\mathbf{4+\sqrt{7}}_{(フヘ)}$$

図形の対称性より，　$\overrightarrow{\mathrm{MM''}}=-\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}(\sqrt{7}\vec{p}+\vec{q})$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MM''}}=\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2(\vec{p}+\sqrt{7}\vec{q})\cdot(\sqrt{7}\vec{p}+\vec{q})$$

$$=\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2(\sqrt{7}|\vec{p}|^2+2\sqrt{7}\vec{p}\cdot\vec{q}+\sqrt{7}|\vec{q}|^2)$$

$$=\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2\left\{\sqrt{7}\cdot1^2+2\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)+\sqrt{7}\cdot1^2\right\}=\mathbf{0}_{(ホ)}$$

$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{MM''}}\neq\vec{0}$ であるから，　$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MM''}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MM''}}|$ であるから，$\triangle\mathrm{MM'M''}$ の面積は，

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}||\overrightarrow{\mathrm{MM''}}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}|^2=\mathbf{\frac{4+\sqrt{7}}{2}}_{(マミム)}$$

別解(c)　$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ は次のように求めることもできる.

下の図のように P をとると，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM'}}=\overrightarrow{\mathrm{MC}}=-\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MM'}}&=\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{PM'}}=\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CM}}\\&=-\frac{1+\sqrt{7}}{6}\vec{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{6}\vec{q}+\vec{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{6}(\vec{p}+\vec{q})\\&=-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\vec{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{3}\vec{q}_{(\text{ニヌネノハヒ})}\end{aligned}$$

別解(c)　$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MM''}}=0$ は図形的に示すこともできる.

下の図のように点 Q をとり，CQ の中点を N とすると，図の対称性から，

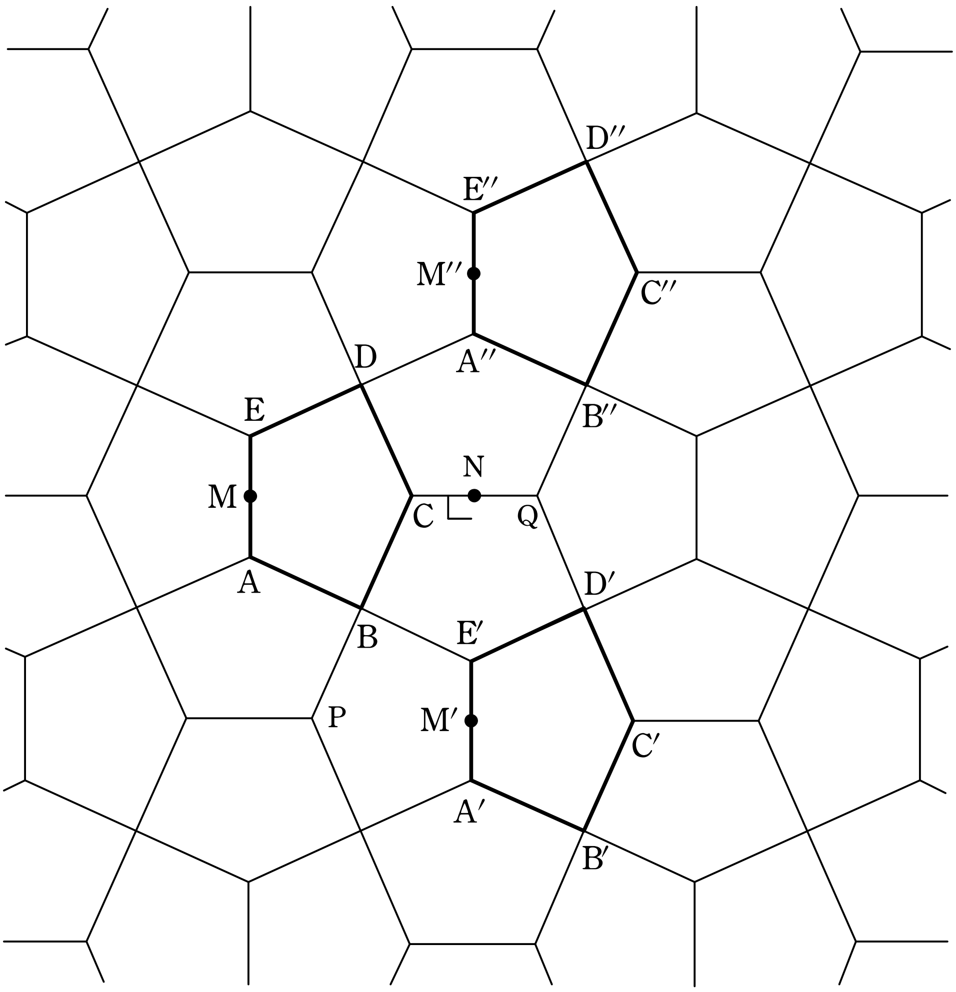
$\mathrm{MN}=\mathrm{M'N}$　かつ　$\mathrm{MN}\perp\mathrm{M'N}$

が成り立つ．よって，$\triangle\mathrm{MNM'}$ は直角二等辺三角形であるから $\angle\mathrm{M'MN}=\dfrac{\pi}{4}$ である.

同様に，$\angle\mathrm{M''MN}=\dfrac{\pi}{4}$ であるから，

$$\angle\mathrm{M'MM''}=\angle\mathrm{M'MN}+\angle\mathrm{M''MN}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MM''}}$ であるから，　$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MM''}}=0_{(\text{ホ})}$



3

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$a_n=f^{-1}(n)$ が成り立つとき，

$$n=f(a_n) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$ のとき，① より $n=\sqrt{a_n+1}$ $\quad\therefore\quad a_n=n^2-1$

よって，$a_2=2^2-1=3$，$a_3=3^2-1=8$

(2) $f(x)=\sqrt{x+1}$ のとき，(1) より $a_n=n^2-1$ であるから，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n-1}k(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}k\{(k+1)^2-1-k^2+1\}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k)\\&=\frac{1}{3}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n\\&=\frac{1}{6}(n-1)n\{2(2n-1)+3\}\\&=\frac{1}{6}(n-1)n(4n+1)\end{aligned}$$

$S_1=0$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，$S_n=\dfrac{1}{6}(n-1)n(4n+1)$

(3) $f(x)=e^x$ のとき，① より $n=e^{a_n}$ $\quad\therefore\quad a_n=\log n$

よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n-1}k\{\log(k+1)-\log k\}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\{k\log(k+1)-k\log k\}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)\log(k+1)-k\log k-\log(k+1)\}\\&=n\log n-1\cdot\log 1-(\log 2+\log 3+\log 4+\cdots\cdots+\log n)\\&=n\log n-\log(n\,!)\quad(\because\ \log 1=0)\end{aligned}$$

$S_1=0$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，$S_n=n\log n-\log(n\,!)$ (証明終)

(4) (3) より $S_n=n\log n-\log(n\,!)$ であるから，

$$\begin{aligned}n\,!\geqq n^ne^{1-n}\quad&\Longleftrightarrow\quad\log(n\,!)\geqq\log(n^ne^{1-n})\\&\Longleftrightarrow\quad\log(n\,!)\geqq n\log n+1-n\\&\Longleftrightarrow\quad n-1\geqq S_n\quad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

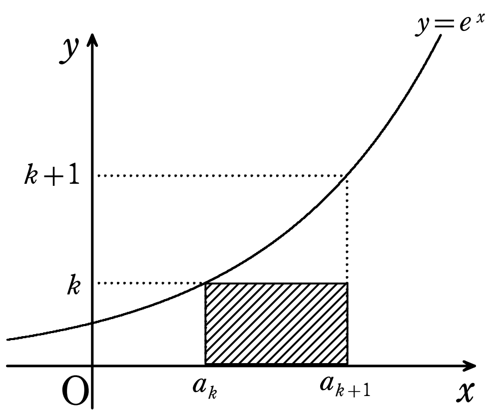
以下，② が成り立つことを示す．

$f(x)=e^x$ とする.

$a_k=f^{-1}(k)$, $a_{k+1}=f^{-1}(k+1)$ より

$$k=f(a_k),\quad k+1=f(a_{k+1})$$

であるから, $k(a_k-a_{k+1})$ は右図の斜線部分の面積を表す.



面積の大小関係より,

$$k(a_k-a_{k+1})\leqq\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^x\,dx$$

$n\geqq 2$ のとき, 両辺の和をとると,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1}-a_k)\leqq\sum_{k=1}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^x\,dx=\int_{a_1}^{a_n} e^x\,dx \quad \cdots\cdots③$$

$a_1=\log 1=0$, $a_n=\log n$ であるから,

$$\int_{a_1}^{a_n} e^x\,dx=\int_0^{\log n} e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^{\log n}$$

$$=e^{\log n}-e^0=n-1$$

よって, ③ より $n\geqq 2$ のとき　$S_n\leqq n-1$

$n=1$ のとき, $S_1=0$ であるから ② の等号が成り立つ.

以上より, 正の整数 n に対して,

$$S_n\leqq n-1 \iff n!\geqq n^n e^{1-n}$$

が成り立つ.　(証明終)

別解(4)　平均値の定理を用いて証明することもできる.

$g(x)=\log x$ とおくと, $x>0$ において連続かつ微分可能であり,　$g'(x)=\dfrac{1}{x}$

k を 2 以上の自然数とすると, 平均値の定理により,

$$\frac{g(k+1)-g(k)}{(k+1)-k}=g'(c) \quad \text{かつ} \quad k<c<k+1$$

$$\iff \log(k+1)-\log k=\frac{1}{c} \quad \text{かつ} \quad k<c<k+1$$

となる実数 c が存在し, これを用いると,

$$\log(k+1)-\log k<\frac{1}{k}$$

$$\therefore\quad k\{\log(k+1)-\log k\}<1$$

よって, $n\geqq 2$ のとき,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\{\log(k+1)-\log k\}<\sum_{k=1}^{n-1} 1=n-1$$

(3) より,

$$n\log n-\log(n!)<n-1$$

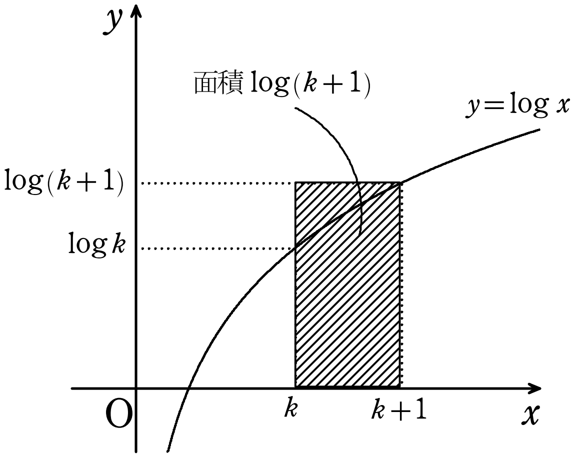
$$\log n^n e^{1-n}<\log(n!)$$

$$\therefore\quad n!>n^n e^{1-n}$$

$n=1$ のとき, $n!=n^n e^{1-n}$ が成り立つ.

以上より,　$n!\geqq n^n e^{1-n}$　(証明終)

補足(4)　S_n ではなく，$\log(n!)$ を面積評価してもよい．



② $\iff \log(n!) \geqq n\log n+1-n$

$\iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log k \geqq n\log n+1-n$

k を自然数とすると，$k \leqq x \leqq k+1$ において，

$$\log k \leqq \log x \leqq \log(k+1)$$

右側の不等式について，定積分すると，

$$\int_k^{k+1} \log x\,dx \leqq \int_k^{k+1} \log(k+1)\,dx = \log(k+1)$$

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1) \geqq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \log x\,dx$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} \log k > \int_1^n \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^n = n\log n - n + 1$$

$n=1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log k = n\log n+1-n$ が成り立つ．

したがって，自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \log k \geqq n\log n+1-n \quad \iff \quad ②$$

が成り立つ．（証明終）

補足　S_n は一般的な形で計算することもできる．

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = f^{-1}(n)$ であるから，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(ka_{k+1} - ka_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)a_{k+1} - ka_k - a_{k+1}\}$$

$$= na_n - 1\cdot a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}$$

$$= nf^{-1}(n) - f^{-1}(1) - \sum_{k=1}^{n} f^{-1}(k) \quad (\because\ f^{-1}(1)=0)$$

別解　(4) の ② は数学的帰納法で証明することもできる.

② が成り立つことを，数学的帰納法で示す.

$n=1$ のとき，$S_1=0$ より ② の等号が成り立つ.

$n=m$ のとき，② が成り立つと仮定すると，

$$S_m \leqq m-1 \iff \log(m\,!) \geqq m\log m - m + 1 \quad \cdots\cdots ③$$

$n=m+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
&(m+1)\log(m+1)-(m+1)+1-\log\{(m+1)!\}\\
&=(m+1)\log(m+1)-m-\log(m+1)-\log(m\,!)\\
&\leqq m\log(m+1)-m-(m\log m-m+1)\\
&=m\{\log(m+1)-\log m\}-1 \quad \cdots\cdots ④
\end{aligned}$$

ここで，$g(x)=\log x$ とおくと $x>0$ において連続かつ微分可能であるから，平均値の定理により，

$$\frac{\log(m+1)-\log m}{(m+1)-m}=g'(c)=\frac{1}{c} \quad \text{かつ} \quad m<c<m+1$$

$$\iff \log(m+1)-\log m=\frac{1}{c} \quad \text{かつ} \quad m<c<m+1$$

となる実数 c が存在する.

これを用いると，　$\log(m+1)-\log m=\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{m}$

④ について，　$m\{\log(m+1)-\log m\}-1<m\cdot\dfrac{1}{m}-1=0$

したがって，$n=m+1$ のときも ② は成り立つ.

以上より，すべての正の整数 n について，② は成り立つ.