解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　慶応義塾大学医学部

【　講　評　】

例年通り，大問４題で出題された．出題形式にも変化はなかった．昨年と同様，証明を必要とする記述問題の出題もなかった（グラフを図示させる問題はあった）．全体的に方針の立てやすい問題が多く，計算量も多くない．易しくなった昨年と同程度の難易度である．１次合格のためには，最低でも 70% の得点が必要となるだろう．以下，大問ごとに特徴を述べる．

［Ｉ］小問集合　【易】

(1) は座標平面上の三角形の内心，外心の座標を求める問題であった．様々な解き方があるが，どの方針で解いてもかかる時間に大差はないだろう．(2) は楕円の接線と x，y 軸が作る三角形の面積の最小値を求める典型問題であった．(3) は三角関数の最大値と，面積の問題であった．今回のセットであれば，どれも落とせない問題である．

［Ⅱ］確率　【易】

玉の取り出し方に関する確率を，漸化式を利用して求める典型問題で，丁寧な誘導があり非常に解きやすい問題であった．本学では頻出な内容であることを考慮すると，これは絶対に落とせない問題である．なお，確率に関しては２年連続で難易度の低い問題が出題されている．

［Ⅲ］微分法・積分法（数学Ⅲ）／極限　【標準】

(1) は極値を求める問題，(2) はグラフを図示する問題である．(3) は (2) で図示したグラフと原点を通る直線が４点で交わる条件を求める問題で，連立して得られる方程式の解の個数で処理してもよいし，接線に注目して図形的に解いてもよい．(4) は部分分数分解で，これを用いて (5) の定積分の極限計算を行う．最後の計算はやや煩雑であるが，本学の試験としては標準的なものである．出来れば完答したい問題である．

［Ⅳ］ベクトル（空間座標）／数学Ⅲ積分法（体積）／2 次関数（最大・最小）【標準】

空間座標内の四面体や六面体の断面積を求める問題であった．特に後半の六面体をイメージするのは容易ではない．設問の指示通り，交点の座標を地道に求め，断面のみに注目することが大切である．時間的な面もあり，完答できなかった人が多いのではないだろうか．

【　解　答　】

［Ⅰ］

⑴　(あ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,　(い) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,　(う) $\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$,　(え) $\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$

⑵　(お) $-\dfrac{2X}{3Y}$,　(か) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,　(き) 1,　(く) $\sqrt{6}$,

⑶　(け) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$,　(こ) $\dfrac{2}{3}$

［Ⅱ］

⑴　(あ) $\dfrac{1}{2}$,　(い) $\dfrac{1}{2}$,　(う) $\dfrac{1}{6}$,　(え) $\dfrac{2}{3}$,　(お) 0,　(か) $\dfrac{1}{2}$,

⑵　(き) $\dfrac{1}{6}$,　(く) $\dfrac{1}{2}$,　(け) $\dfrac{3}{5}$,　(こ) $\dfrac{2}{5}$,　(さ) $\dfrac{1}{6}$,　(し) $\dfrac{1}{5}$,　(す) 2,　(せ) $\dfrac{1}{3}$

［Ⅲ］

⑴　(あ) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,　(い) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,　(う) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,　(え) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

⑵　解説参照

⑶　(お) $m<-\dfrac{4}{3}$

⑷　(か) $\dfrac{1}{6}$,　(き) $-\dfrac{1}{3}$,　(く) $\dfrac{1}{6}$

⑸　(け) $\dfrac{1}{6}\log\left(\dfrac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}\right)$,　(こ) 1,

［Ⅳ］

⑴　(あ) $5t-8$,　(い) $-t$,　(う) $3t-6$,　(え) $2t-3$,　(お) t,　(か) $-t$,　(き) t,　(く) t

⑵　(け) $-8t^2+24t-12$,　(こ) 8

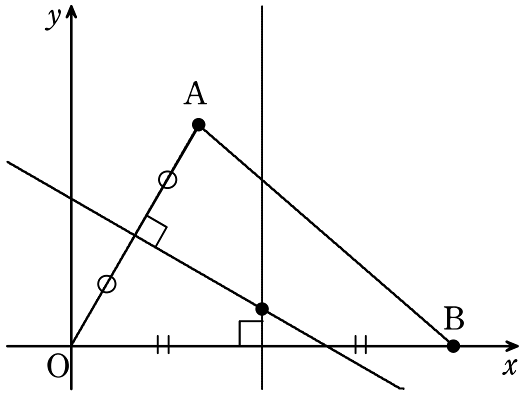
⑶　(さ) ACD,　(し) BCD,　(す) ABD,　(せ) $\dfrac{3}{5}$,　(そ) $\dfrac{4}{5}$

⑷　(た) $\dfrac{11}{7}$,　(ち) $\dfrac{44}{7}$

【 解 説 】

[Ⅰ]

(1) 三角形の外心は，各辺の垂直二等分線の交点である．



辺 OA の垂直二等分線の方程式は $x=\dfrac{3}{2}$ ……①

辺 OB の垂直二等分線の方程式は

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad ……②$$

①，② を連立させて，

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

よって，外心の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)_{(あ，い)}$

三角形 OAB は $y\geqq 0$ の部分に存在し，辺 OA は x 軸上にあるから，内接円の半径 r が内心の y 座標である．

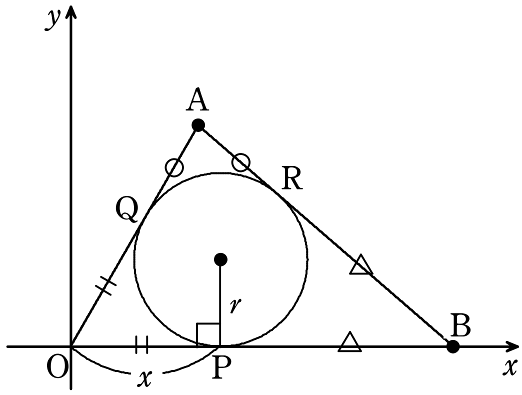
$$\mathrm{OA}=3,\quad \mathrm{OB}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,\quad \mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$$

であるから，内接円の半径 r について，三角形 OAB の面積に注目すると，

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{AB})$$

$$3\sqrt{3}=r(3+2+\sqrt{7})$$

$$\therefore\quad r=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$$



また，内接円が辺 OA，OB，OC と接する点を P，Q，R とし，

OP＝OQ＝x とすると，

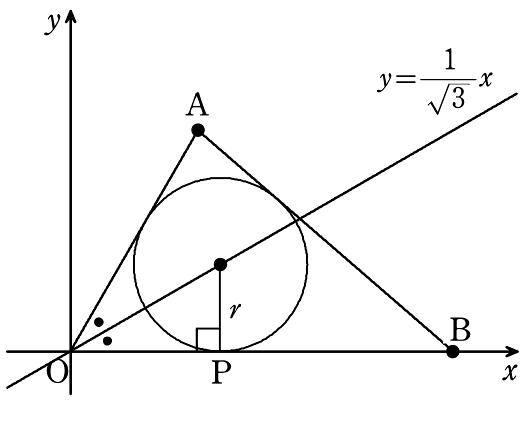
$$\mathrm{AQ}=\mathrm{AR}=3-x,\quad \mathrm{BP}=\mathrm{BR}=2-x$$

であるから， AB＝AR＋BR より，

$$\sqrt{7}=3-x+2-x \qquad \therefore\quad x=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

よって，内心の座標は $\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}\right)_{(う，え)}$

別解 内接円の半径を求めた後は，次のように処理してもよい．



$\mathrm{B}\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから， $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$

よって， ∠AOB の二等分線の方程式は $y=\left(\tan\dfrac{\pi}{6}\right)x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

これにより，内心の座標は$\left(t,\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)$とおけるから，内接円の中心の y 座標が半径と等しくなることから，

$$\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6} \qquad \therefore\quad t=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

よって，内心の座標は $\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}\right)_{(う，え)}$

別解　中心の座標を文字でおき，各辺と接する条件から連立方程式を導いて解くこともできる．
内接円の中心を$(a,\ b)$とおくと，この点から

直線OA：$x=0$，

直線OB：$y=\sqrt{3}x \iff \sqrt{3}x-y=0$

直線AB：$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-3) \iff \sqrt{3}x+2y-3\sqrt{3}=0$

までの距離が等しいことから，

$$|b|=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{\sqrt{3+1}}=\frac{|\sqrt{3}a+2b-3\sqrt{3}|}{\sqrt{3+4}}$$

$$\therefore\quad |b|=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{2}=\frac{|\sqrt{3}a+2b-3\sqrt{3}|}{\sqrt{7}}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，点$(a,\ b)$は$y>0$かつ$\sqrt{3}x-y>0$，$\sqrt{3}x+2y-3\sqrt{3}<0$を満たす領域に存在するから，

$$b>0,\quad \sqrt{3}a-b>0,\quad \sqrt{3}a+2b-3\sqrt{3}<0$$

が成り立つ．
したがって，①より

$$b=\frac{\sqrt{3}a-b}{2}=-\frac{\sqrt{3}a+2b-3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \iff \begin{cases}2b=\sqrt{3}a-b\\ -\sqrt{7}b=\sqrt{3}a+2b-3\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}3b=\sqrt{3}a & \cdots\cdots②\\ -(2+\sqrt{7})b=\sqrt{3}a-3\sqrt{3} & \cdots\cdots③\end{cases}$$

②を③に代入すると，

$$-(2+\sqrt{7})b=3b-3\sqrt{3}$$

$$(5+\sqrt{7})b=3\sqrt{3}\qquad \therefore\quad b=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$$

これを②に代入すると，$\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{2}=\sqrt{3}a \qquad \therefore\quad a=\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$

よって，内心の座標は $\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}\right)$（う，え）

(2)　点 $(X,\ Y)$ は第一象限の点であるから，$X>0$，$Y>0$ である．

この点における接線 ℓ の方程式は　$\dfrac{X}{3}x+\dfrac{Y}{2}y=1$　……①　　$\therefore$　$y=-\dfrac{2X}{3Y}+\dfrac{2}{Y}$

よって，接線 ℓ の傾きは $\boldsymbol{-\dfrac{2X}{3Y}}$ (お) である．

① において，

$x=0$ のとき　$y=\dfrac{2}{Y}$，$y=0$ のとき　$x=\dfrac{3}{X}$

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{X},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{2}{Y}\right)$ であるから，三角形 OPQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{X}\cdot\frac{2}{Y}=\frac{3}{XY}$$

ここで，$\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{Y^2}{3}=1$ において，相加・相乗平均の不等式により，

$$1=\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{3}\geqq 2\sqrt{\frac{X^2}{2}\cdot\frac{Y^2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}XY$$

$X>0$，$Y>0$ より $XY>0$ であるから，　$\dfrac{1}{XY}\geqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

等号が成り立つのは

$$\frac{X^2}{3}=\frac{Y^2}{2}=\frac{1}{2}\text{ かつ }X>0,\ Y>0 \iff X=\frac{\sqrt{6}}{2},\ Y=1$$

したがって，

$$S=\frac{3}{XY}\geqq 3\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{6}$$

であるから，三角形 OPQ の面積は $(X,\ Y)=\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ 1\right)}$ (か，き) のとき最小値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ (く) をとる．

別解　楕円上の点 $(X,\ Y)$ を三角関数でパラメータ表示してもよい．

点 $(X,\ Y)$ は第一象限にあり，$\dfrac{X^2}{3}+\dfrac{Y^2}{2}=1$ を満たすから，

$$\begin{cases} X=\sqrt{3}\cos\theta \\ Y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおける．

これを用いると，　$S=\dfrac{3}{XY}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 2\theta}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<2\theta<\pi$ であるから，S が最小となるのは，

$$\sin 2\theta=1\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

のときである．

このとき，　$X=\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$Y=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=1$

以上より，三角形 OPQ の面積は $(X,\ Y)=\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ 1\right)}$ (か，き) のとき最小値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ (く) をとる．

(3)　$y=\cos x\sin 2x=2\sin x\cos^2 x=2\sin x(1-\sin^2 x)$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq t\leqq 1$ であり，

$$y=2t(1-t^2)=2t-2t^3$$

よって，$\dfrac{dy}{dt}=2-6t^2=2(1-3t^2)$

$0\leqq t\leqq 1$ における y の増減は次のようになる．

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって，y は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大となり，その最大値は

$$y=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{4}{9}\sqrt{3}_{\text{（け）}}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，　$y=\cos x\sin 2x\geqq 0$

よって，この関数のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積は，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin 2x\,dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x)\cos^2 x\,dx$$

$$=-2\left[\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}_{\text{（こ）}}$$

[Ⅱ]

袋1から赤玉，袋2から白玉を取り出すことを，$(R,\ W)$ などと表す．

(1)　$A \longrightarrow A$ となるのは，$(R,\ W)$のときであるから，　$P(A \longrightarrow A)=1\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ (あ)，

$A \longrightarrow B$ となるのは，$(W,\ R)$ のときであるから，　$P(A \longrightarrow B)=1\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ (い)，

$B \longrightarrow A$ となるのは，$(W,\ R)$ のときであるから，　$P(B \longrightarrow A)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{6}$ (う)，

$B \longrightarrow B$ となるのは，$(W,\ W)$ または $(R,\ R)$ のときであるから，　$P(B \longrightarrow B)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}$ (え)，

$C \longrightarrow A$ が起こることはないから，　$P(C \longrightarrow A)=0$ (お)，

$C \longrightarrow B$ となるのは，$(R,\ W)$ のときであるから，　$P(C \longrightarrow B)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$ (か)

(2)　$n \geqq 2$ のとき，操作Tを n 回施し終えたとき，状態 A であるのは，

　$n-1$ 回施し終えたときに状態 A で，$A \longrightarrow A$ が起こる，または

　$n-1$ 回施し終えたときに状態 B で，$B \longrightarrow A$ が起こる，または

　$n-1$ 回施し終えたときに状態 C で，$C \longrightarrow A$ が起こる，

のいずれかであり，互いに排反であるから，

$$a_n = P(A \longrightarrow A)\cdot a_{n-1} + P(B \longrightarrow A)\cdot b_{n-1} + P(C \longrightarrow A)\cdot c_{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{6}b_{n-1} + 0\cdot c_{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

操作Tを n 回施し終えたとき，状態 B であるのは，

　$n-1$ 回施し終えたときに状態 B で，$B \longrightarrow A$ が起こる，または

　$n-1$ 回施し終えたときに状態 B で，$B \longrightarrow B$ が起こる，または

　$n-1$ 回施し終えたときに状態 B で，$C \longrightarrow B$ が起こる，

のいずれかであり，互いに排反であるから，

$$b_n = P(A \longrightarrow B)\cdot a_{n-1} + P(B \longrightarrow B)\cdot b_{n-1} + P(C \longrightarrow B)\cdot c_{n-1}$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \quad \cdots\cdots ②$$

状態 A，B，C 以外の状態はないから，　$a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=1$　　$\therefore$　$a_{n-1}+c_{n-1}=1-b_{n-1}$

これと ② より，

$$b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+c_{n-1}) + \frac{2}{3}b_{n-1} = \frac{1}{2}(1-b_{n-1}) + \frac{2}{3}b_{n-1}$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{1}{2} \text{ (き，く)}$$

状態 B から始めるから，$b_0=1$ とすると，この漸化式は $n=1$ のときも成り立つ．

漸化式を変形すると，　$b_n - \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{6}\left(b_{n-1} - \dfrac{3}{5}\right)$

$\left\{b_n - \dfrac{3}{5}\right\}$ は等比数列であるから，

$$b_n - \frac{3}{5} = \left(b_0 - \frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n \qquad \therefore \quad b_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ (け，こ，さ)}$$

これを①に代入すると，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{6}\left\{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{10}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

状態 B から始めるから， $a_0=0$ とすると，これは $n=0$ のときも成り立つ.

両辺を $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ で割ると， $d_n=\dfrac{a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ であるから，

$$d_{n+1}=\frac{\frac{1}{2}a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}+\frac{\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}+\frac{2}{5}\cdot\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}=d_n+\frac{1}{5}\cdot 2^n+\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$\{d_n\}$ の階差数列の一般項は $\frac{1}{5}\cdot 2^n+\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$ であるから， $d_0=\dfrac{a_0}{\left(\frac{1}{2}\right)^0}=0$ より，

$$\begin{aligned}
d_n&=d_0+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{5}\cdot 2^k+\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}\\
&=0+\frac{1}{5}\cdot\frac{2^n-1}{2-1}+\frac{2}{15}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\\
&=\frac{1}{5}(2^n-1)+\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\\
&=\frac{1}{5}\left\{2^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}_{(し，す，せ)}
\end{aligned}$$

[Ⅲ]

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3x(x^2-1)}$ について,

$$f(-x)=\frac{1}{3(-x)\{(-x)^2-1\}}=-\frac{1}{3x(x^2-1)}=-f(x)$$

が成り立つから，関数 $f(x)$ は奇関数である.

以下，$x>0$，$x\fallingdotseq 1$ で考える.

$$f'(x)=-\frac{3x^2-1}{3x^2(x^2-1)^2}=-\frac{(\sqrt{3}\,x-1)(\sqrt{3}\,x+1)}{3x^2(x^2-1)^2}$$

$x>0$，$x\fallingdotseq 1$ における $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	/	$-$
$f(x)$	/	↗		↘	/	↘

このとき，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{3}-1\right)}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$y=f(x)$ のグラフがが原点に関して対称であることに注意すると，

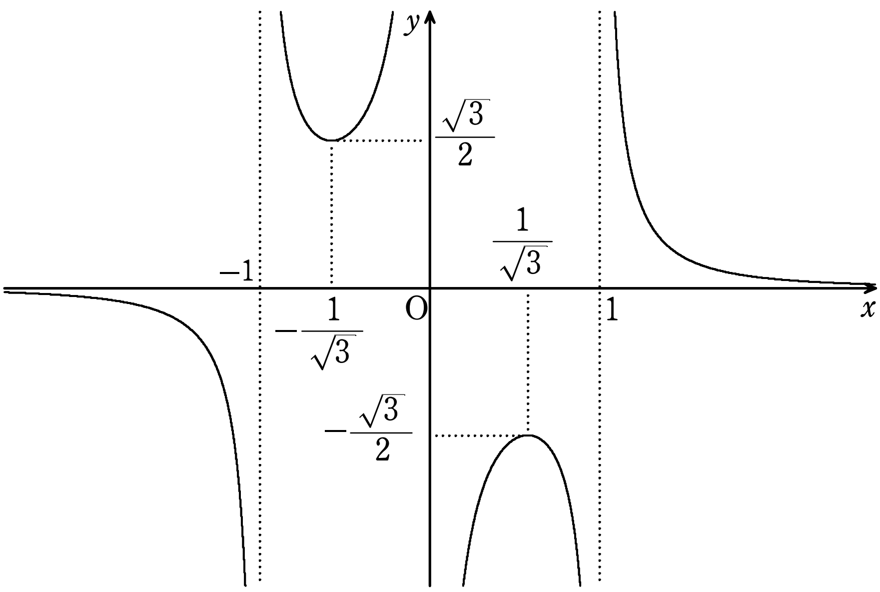
$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (あ) において極小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (い)，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (う) において極大値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (え)

をとる.

(2) (1) の増減表と，

$$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to1-0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

であることから，$y=f(x)$ のグラフは下の図のようになる.



なお，漸近線は $x=-1$，0，1，$y=0$ である.

(3)　$y=f(x)$ は奇関数であり，原点を通らないから，直線 $y=mx$ と 曲線 $y=f(x)$ がちょうど4点で交わるのは，$x>0$ の範囲で2点で交わるときである．

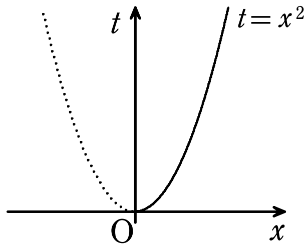
$m=0$ のとき，(2) のグラフより共有点を持たないから，以下 $m\neq 0$ とする．

2式を連立させると　　$mx=f(x)=\dfrac{1}{3x(x^2-1)}$

$$3mx^2(x^2-1)=1 \qquad \therefore\quad 3mx^4-3mx^2-1=0 \quad \cdots\cdots①$$

この方程式が $x>0$ の範囲で異なる2つの実数解をもつときを考える．

$x^2=t$ とおくと，　$3mt^2-3mt-1=0$　$\cdots\cdots②$



$x>0$ より，1つの t に対する x の個数は，

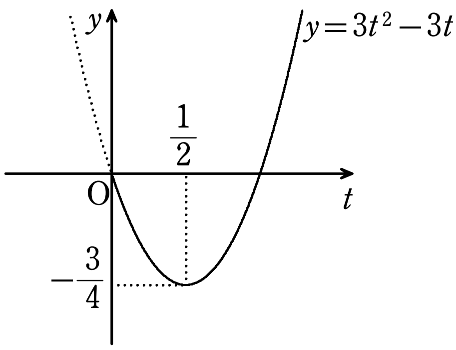
　　$t>0$ のとき1個，

　　$t\leqq 0$ のとき0個

であるから，t の方程式②が $t>0$ の範囲で異なる2つの実数解をもつときを考えればよい．

②より　$m(3t^2-3t)=1$

$$\therefore\quad \frac{1}{m}=3t^2-3t=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$



直線 $y=\dfrac{1}{m}$ と放物線 $y=3t^2-3t$ が $t>0$ の範囲で2つの共有点をもつときを考えると，

$$-\frac{3}{4}<\frac{1}{m}<0 \qquad \therefore\quad m<-\frac{4}{3}\ _{(お)}$$

(4)　$f(x)=\dfrac{1}{3x(x^2-1)}=\dfrac{1}{3(x-1)x(x+1)}$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{(x-1)x}-\frac{1}{x(x+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$$

よって，　$a=\dfrac{1}{6}\ _{(か)}$，$b=-\dfrac{1}{3}\ _{(き)}$，$c=\dfrac{1}{6}\ _{(く)}$

(5)　$x(m)=p$ とする．(4) の結果より，

$$\int_p^T f(x)\,dx=\frac{1}{6}\int_p^T\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{6}\Big[\log|x-1|-2\log|x|+\log|x+1|\Big]_p^T$$
$$=\frac{1}{6}\left[\log\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right|\right]_p^T$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\log\left|\frac{T^2-1}{T^2}\right|-\log\left|\frac{p^2-1}{p^2}\right|\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\log\left|\frac{T^2-1}{T^2}\right|+\log\left|\frac{p^2}{p^2-1}\right|\right\}$$

このとき，

$$\lim_{T\to\infty}\log\left|\frac{T^2-1}{T^2}\right|=\lim_{T\to\infty}\log\left|1-\frac{1}{T^2}\right|=\log 1=0$$

であるから，

$$A(m)=\lim_{T\to\infty}\int_p^T f(x)\,dx=\frac{1}{6}\log\left|\frac{p^2}{p^2-1}\right|$$

ここで，p は $mx=f(x)$ の解であるから，① を満たすので，

$$3mp^4-3mp^2-1=0 \qquad \therefore\ \ p^2=\frac{3m\pm\sqrt{9m^2+12m}}{6m}$$

$p^2>0$ であるから，　$p^2=\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{6m}$

よって，

$$\frac{p^2}{p^2-1}=\frac{\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{6m}}{\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{6m}-1}=\frac{\sqrt{9m^2+12m}+3m}{\sqrt{9m^2+12m}-3m}$$

$$=\frac{(\sqrt{9m^2+12m}+3m)^2}{9m^2+12m-9m^2}=\frac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}$$

以上より，$m>0$ であるから，

$$A(m)=\frac{1}{6}\log\left|\frac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}\right|=\frac{1}{6}\log\left(\frac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}\right)_{(け)}$$

$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(p,\ mp)$，$\mathrm{Q}(p,\ 0)$ であるから，三角形 OPQ の面積は

$$B(m)=\frac{1}{2}\cdot p\cdot mp=\frac{m}{2}p^2=\frac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{12}$$

したがって，

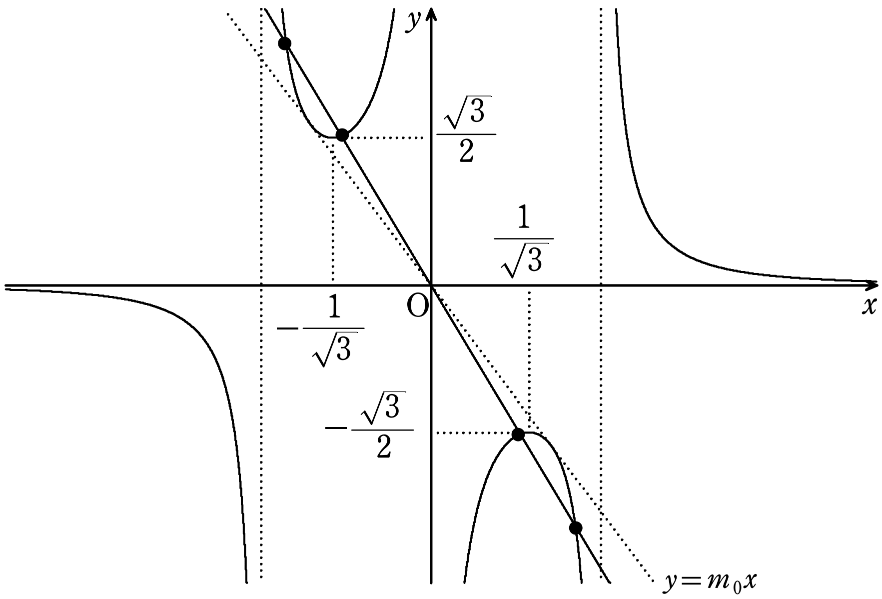
$$\lim_{m\to+0}\frac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{12}=0,\ \ \lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

であることから，

$$\lim_{m\to+0}\frac{A(m)}{B(m)}=\lim_{m\to+0}\frac{\dfrac{1}{6}\log\left(\dfrac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}\right)}{\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{12}}$$

$$=\lim_{m\to+0}\frac{\log\left(1+\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{2}\right)}{\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{2}}=1_{(こ)}$$

別解　$y=f(x)$ と $y=mx$ が接するときに注目して解くこともできる．
直線 $y=mx$ が $y=f(x)$ の $0<x<1$ の部分と接するときの傾きを m_0 とすると，$y=f(x)$ は奇関数，すなわちグラフが原点に関して対称であること，および $0<x<1$ で $y=f(x)$ は上に凸であることから，ちょうど 4 点で交わるのは $m<m_0$ のときである．以下，この m_0 を求める．



グラフ上の点 $(t,\ f(t))\ (0<t<1)$ における接線の方程式は，　$y=f'(t)(x-t)+f(t)$
これが原点を通るとき，　$-tf'(t)+f(t)=0$

$$-t\cdot\left\{-\frac{3t^2-1}{3t^2(t^2-1)^2}\right\}+\frac{1}{3t(t^2-1)}=0$$

$$3t^2-1+t^2-1=0 \qquad \therefore\quad t^2=\frac{1}{2}$$

$0<t<1$ であるから，　$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，　$m_0=f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{3\cdot\frac{1}{2}-1}{3\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\dfrac{4}{3}$

以上より，直線 $y=mx$ と曲線 $y=f(x)$ がちょうど 4 点で交わるのは，　$\boldsymbol{m<-\dfrac{4}{3}}$ (お)

別解　(4) は恒等式処理を行ってもよい．

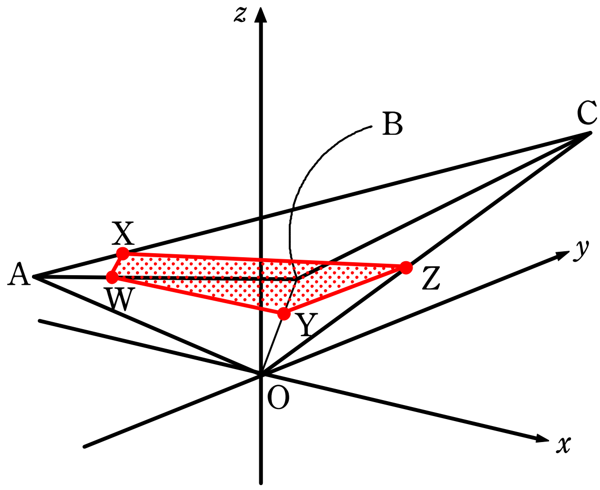
$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}=\frac{ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+cx(x-1)}{x(x^2-1)}$$
$$=\frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x^2-1)}$$

x の恒等式であるから，左辺と係数を比較すると，

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ b=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad \therefore\quad a=\frac{1}{6}_{(か)},\ b=-\frac{1}{3}_{(き)},\ c=\frac{1}{6}_{(く)}$$

[Ⅳ]

(1)　条件から S_t の4つの頂点 W，X，Y，Z について，
辺 AB 上の点が W，辺 AC 上の点が X，辺 OB 上の点が Y，辺 OC 上の点が Z である．



z 座標の比に注目すると，　AW：WB$=t-1:2-t$
であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OW}}=\frac{(2-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{(t-1)+(2-t)}$$
$$=(2-t)(-3,\ -1,\ 1)+(t-1)(2,\ -2,\ 2)$$
$$=(5t-8,\ -t,\ t)$$

同様に，X，Y，Z について考えると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{(3-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{(t-1)+(3-t)}$$
$$=\frac{3-t}{2}(-3,\ -1,\ 1)+\frac{t-1}{2}(3,\ 3,\ 3)$$
$$=(3t-6,\ 2t-3,\ t)$$

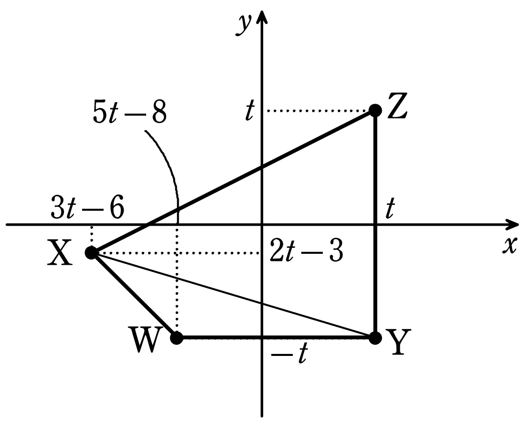
$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{t}{2}(2,\ -2,\ 2)=(t,\ -t,\ t),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{t}{3}(3,\ 3,\ 3)=(t,\ t,\ t)$$

であるから，

　W$(\mathbf{5}t-\mathbf{8},\ -t,\ \mathbf{0})$(あ，い)，X$(\mathbf{3}t-\mathbf{6},\ \mathbf{2}t-\mathbf{3},\ t)$(う，え)，Y$(t,\ -t,\ t)$(お，か)，Z$(t,\ t,\ t)$(き，く)

(2)　W，X，Y，Z はいずれも平面 $z=t$ 上の点であり，
Y，Z の x 座標は等しく，Y，W の y 座標が等しいことから，これを図示すると右図のようになる．



ただし，$1<t<2$ であるから，Y と X の x 座標について，

$$t-(3t-6)=6-2t=2(3-t)>0$$

Y と W の x 座標について，

$$t-(5t-8)=4(2-t)>0$$

X と W の y 座標について，

$$2t-3-(-t)=3t-3=3(t-1)>0$$

である．
したがって，　S_t の面積は三角形 XYW と三角形 XYZ の面積の和であるから，

$$A(t)=\frac{1}{2}\cdot4(2-t)\cdot3(t-1)+\frac{1}{2}\cdot2t\cdot2(3-t)$$
$$=\mathbf{-8}t^{\mathbf{2}}+\mathbf{24}t-\mathbf{12}_{(け)}$$

四面体 OABC の体積について，

　$0\leqq z\leqq1$ の部分は，底面積 $A(1)=-8+24-12=4$，高さ1の四面体，

　$2\leqq z\leqq3$ の部分は，底面積 $A(2)=-32+48-12=4$，高さ1の四面体

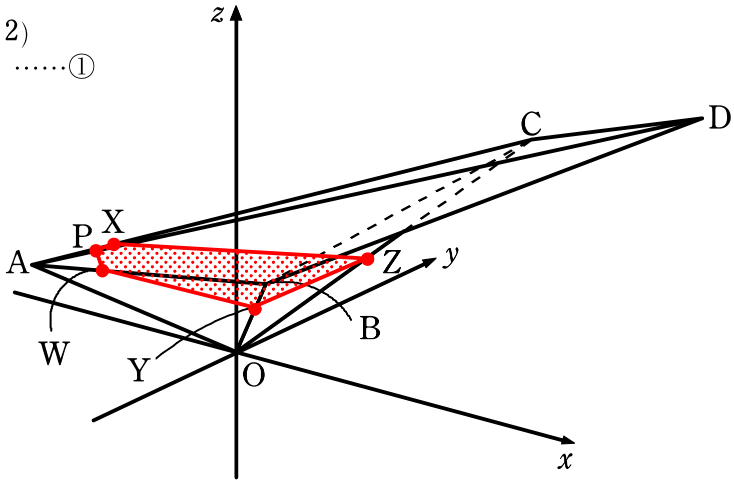
であることに注意すると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot4\cdot1+\int_1^2A(t)\,dt+\frac{1}{3}\cdot4\cdot1=\frac{8}{3}+\int_1^2(-8t^2+24t-12)\,dt$$
$$=\frac{8}{3}+\left[-\frac{8}{3}t^3+12t^2-12t\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{56}{3}+24=\mathbf{8}_{(こ)}$$

(3)　5 点 O，A，B，C，D を頂点とする六面体の 3 つの面は，三角形 OAB，OBC，OAC であるから，
残りの 3 つの面は D と 3 点 A，B，C を結んでできる，ACD，BCD，ABD$_{(さ，し，す)}$である．

$\overrightarrow{AB}=(5,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(6,\ 4,\ 2)$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}\\&=(-3,\ -1,\ 1)+u(5,\ -1,\ 1)+v(6,\ 4,\ 2)\\&=(5u+6v-3,\ -u+4v+1,\ u+2v+1)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$



また，点 E は線分 OD 上にあるから，

$$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OD}=(6k,\ 2k,\ 4k)\quad\cdots\cdots②$$

となる実数 $k\ (0<k<1)$ が存在する．

これらの成分を比較すると，

$$\begin{cases}5u+6v-3=6k & \cdots\cdots③\\-u+4v+1=2k & \cdots\cdots④\\u+2v+1=4k & \cdots\cdots⑤\end{cases}$$

③－④×3 より　$8u-6v=0$　……⑥

⑤－④×2 より　$3u-6v+3=0$　……⑦

⑥－⑦ より　$5u-3=0$　　∴　$u=\dfrac{3}{5}$

⑥ に代入すると，　$v=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{5}$

これらを ⑤ に代入すると　$\dfrac{3}{5}+\dfrac{8}{5}+1=4k$　　∴　$k=\dfrac{4}{5}$（これは $0<k<1$ を満たす）

したがって，　$u=\dfrac{3}{5}{}_{(せ)}$，$v=\dfrac{4}{5}{}_{(そ)}$

このとき，　$u+b=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{7}{5}>1$ であるから，点 E は六面体の外の点である．

(4)　$1<t<2$ のとき，平面 $z=t$ と辺 AD の交点を P とすると，　$AP : PD=t-1 : 4-t$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\frac{(4-t)\overrightarrow{OA}+(t-1)\overrightarrow{OD}}{(t-1)+(4-t)}=\frac{4-t}{3}(-3,\ -1,\ 1)+\frac{t-1}{3}(6,\ 2,\ 4)\\&=(3t-6,\ t-2,\ t)\end{aligned}$$

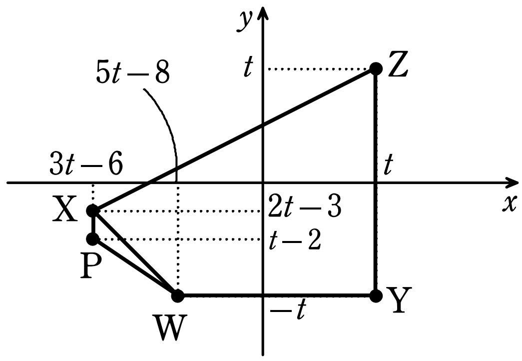
点 X，P の x 座標は等しく，　y 座標について

$2t-3-(t-2)=t-1>0$，

また，点 P，W の y 座標について，

$t-2-(-t)=2(t-1)>0$

よって，(3) の六面体を平面 $z=t$ で切った切り口は，
右図の五角形となる．



この図形の面積は，(2) の S_t の面積 $A(t)$ と三角形 PXW の面積の和であるから，

$$\begin{aligned}U(t)&=A(t)+\frac{1}{2}\cdot(t-1)\cdot\{(5t-8)-(3t-6)\}=-8t^2+24t-12+(t-1)^2\\&=-7t^2+22t-11=-7\left(t-\frac{11}{7}\right)^2+\frac{44}{7}\end{aligned}$$

$1<t<2$ であるから，$U(t)$ は $t=\dfrac{11}{7}{}_{(た)}$ のとき，最大値 $\dfrac{44}{7}{}_{(ち)}$ をとる．

$\boxed{\text{別解}}$ (2) の体積は，スカラー三重積を覚えていれば簡単に求めることができる．

求める体積 V は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を 3 辺とする四面体の体積であるから，

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$$

となる．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-3,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ -2,\ 2)$ について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-2+2,\ -(-6-2),\ 6+2)=(0,\ 8,\ 8)$$

よって，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{6}|(0,\ 8,\ 8)\cdot(3,\ 3,\ 3)|\\&=4|(0,\ 1,\ 1)\cdot(1,\ 1,\ 1)|\\&=4\cdot|2|=8\end{aligned}$$