2024年度　杏林大学

【　講　評　】

昨年同様, 大問 3 題で出題された. 以下, 大問ごとに述べる.

問題Ⅰ(図形と方程式／2 次曲線)【標準】

(a), (b) は円と直線に関する問題であった. 接線や弦の長さ, 軌跡に関する典型的な問題なので, ここは確実に得点したい. (c) は 2 次曲線から楕円と直線に関する出題であった. ベクトルの表記に惑わされ, 手が止まってしまった人も少なくないだろう. 意味がわかっていなくても素直に誘導に乗るか, 誘導には乗らずに自分の知っている解法で解くことができたかが鍵である.

問題Ⅱ(数Ⅲ微分法／数Ⅲ積分法)【やや易】

数学Ⅲの微分法, 積分法に関する典型問題であった. 計算はやや煩雑だが難易度は高くなく, 完答したい問題である.

問題 Ⅲ(複素数平面)【やや難】

前半の (a), (b) は標準的な問題であるため, 確実に得点したい. (c) は複素数平面上の線対称移動に関する問題で, やや誘導に乗りづらいこともあり, 完答は難しいだろう.

すべての問題に数学Ⅲの内容が含まれ, 数学Ⅲの出題割合が大幅に上がったが, 全体的な難易度は昨年よりもやや下がった. 全体で 60～65% 程度の得点ができれば, 1 次通過の可能性が高いと思われる.

【　解　答　】

Ⅰ. (a)　ア：4,　イ：2,　ウ：1,　エ：0,　オ：2,
(b)　カ：0,　キ：③,　ク：5,　ケ：8,　コ：5,　サ：3,　シ：1,　ス：1,
(c)　セ：4,　ソ：2,　タ：1,　チ：0,　ツ：8,　テ：3,　ト：0,　ナ：2,　ニ：2,　ヌ：6

Ⅱ. (a)　ア：－,　イ：4,　ウ：5,　エ：2,　オ：5,　カ：4,　キ：3,　ク：2,　ケ：3,
(b)　コ：2,　サ：3,　シ：4,　ス：3,　セ：②,
(c)　ソ：4,　タ：3,　チ：1,

Ⅲ. (a)　ア：6,　イ：2,　ウ：8,　エ：1,　オ：2,　カ：1,　キ：2,　ク：1,　ケ：2,　コ：3,　サ：2,
(b)　シ：6,　ス：1,　セ：1,
(c)　ソ：6,　タ：2,　チ：⑥,　ツ：⑤,　テ：－,　ト：2,　ナ：1,　ニ：0,　ヌ：4,　ネ：1,　ノ：2

【 解 説 】

Ⅰ

(a) $\ell : y=a(x-4)+2$ より，ℓ は傾き a によらず定点 $\mathrm{F}(\mathbf{4},\ \mathbf{2})$ (アイ) を通る．

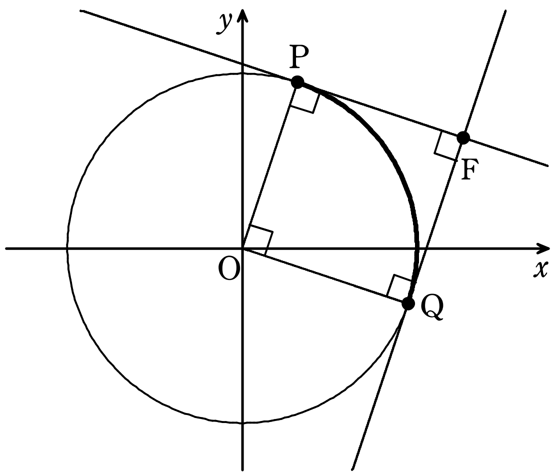
直線 ℓ が円 C に接するとき，円 C の中心 $(0,\ 0)$ から直線 ℓ までの距離が，円 C の半径 $\sqrt{10}$ に等しいから，

$$\frac{|-4a+2|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10}$$

$$16a^2-16a+4=10(a^2+1)$$

$$3a^2-8a-3=0$$

$$(3a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore \quad a=-\frac{1}{3},\ 3$$



a の値より，円 C と接するときの 2 本の直線 ℓ は直交する．

よって，短い方の弧 PQ に対応する中心角は $\dfrac{\pi}{2}$ であり，

その長さは

$$\sqrt{10}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{2}}\pi \text{ (ウエオ)}$$

(b) 右図より， $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{FM}}$ であるから， $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\mathbf{0}$ (カ)

直径に対する円周角の定理の逆から，点 M が描く軌跡は，

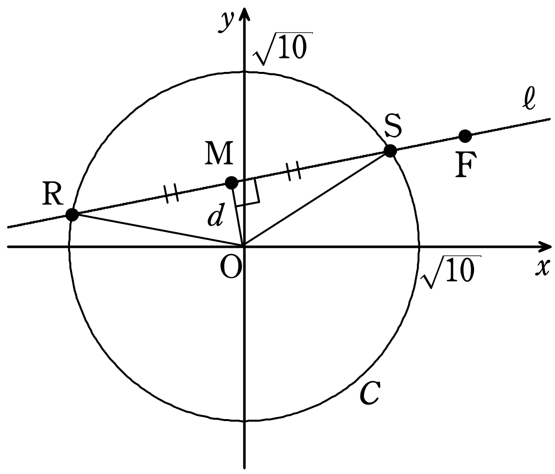
原点 O を通り

線分 FO を直径とする円　③ (キ)

の一部である．

$\mathrm{OM}=d\ (>0)$ とすると， $\triangle\mathrm{ORM}$ に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{RM}=\sqrt{\mathrm{OR}^2-\mathrm{OM}^2}=\sqrt{10-d^2}$$



よって，$\triangle\mathrm{ORM}$ の面積は

$$S=\frac{1}{2}\cdot d\cdot 2\sqrt{10-d^2}=\sqrt{10d^2-d^4}$$

$$=\sqrt{-(d^2-5)^2+25}$$

$d>0$ より $d^2>0$ であるから， S が最大となるのは，

$$d^2=5 \qquad \therefore \quad d=\sqrt{\mathbf{5}} \text{ (ク)}$$

また， $d=\sqrt{5}$ のとき

$$\frac{|-4a+2|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5}$$

$$16a^2-16a+4=5(a^2+1)$$

$$11a^2-16a-1=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{8\pm\sqrt{64+11}}{11}=\frac{\mathbf{8}\pm\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{11}} \text{ (ケコサシス)}$$

(c) 点 $\mathrm{T}(u,\ v)$ が直線 ℓ 上にあることから， $v=au-4a+2$

よって，

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left(\frac{u}{\sqrt{10}},\ \frac{v}{2}\right)\cdot(a\sqrt{10}.\ \ -2)=au-v$$

$$=au-(au-4a+2)=\mathbf{4}a-\mathbf{2} \text{ (セソ)}$$

点$\mathrm{T}(u,\ v)$が楕円E上にあることから，　$\dfrac{u^2}{10}+\dfrac{v^2}{4}=1$

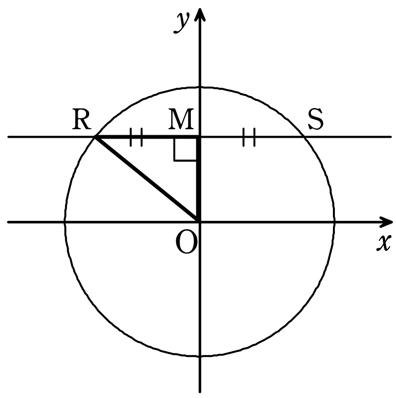
よって，　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\dfrac{u}{\sqrt{10}}\right)^2+\left(\dfrac{v}{2}\right)^2}=\mathbf{1}$(タ)

$|\vec{\beta}|=\sqrt{10a^2+4}$ であるから，$-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\leqq\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leqq|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ より

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|^2\leqq|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2$$

$$(4a-2)^2\leqq(10a^2+4)\cdot 1$$

$$a(3a-8)\leqq 0 \qquad \therefore\quad 0\leqq a\leqq\frac{8}{3}$$



よって，直線ℓと楕円Eが共有点をもつaの範囲は，　$\mathbf{0\leqq a\leqq\dfrac{8}{3}}$(チツテ)

$a=0$ のとき，$\ell:y=2$ であるから，楕円Eと$(\mathbf{0,\ 2})$(トナ) で接する.

またこのとき，右の図の直角三角形ORMに注目して，

$$\mathrm{RS}=2\mathrm{RM}=2\sqrt{\mathrm{OR}^2-\mathrm{OM}^2}$$

$$=2\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\mathbf{2\sqrt{6}}$$(ニヌ)

別解　(a)の弧PQの長さは，次のように求めてもよい.

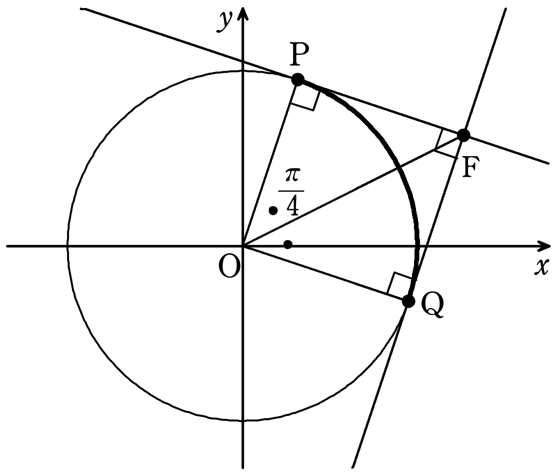
直線ℓが円Cに接するとき，　$\mathrm{OP}\perp\mathrm{FP}$

また，

$\mathrm{OP}=\sqrt{10}$，　$\mathrm{OF}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

であるから，$\triangle$OPFは直角二等辺三角形であり，

$$\angle\mathrm{FOP}=\frac{\pi}{4}$$



同様に，$\angle\mathrm{FOQ}=\dfrac{\pi}{4}$ であるから，

$$\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{2}$$

したがって，短い方の弧PQの長さは

$$\sqrt{10}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\mathbf{\sqrt{10}}}{\mathbf{2}}\pi$$(ウエオ)

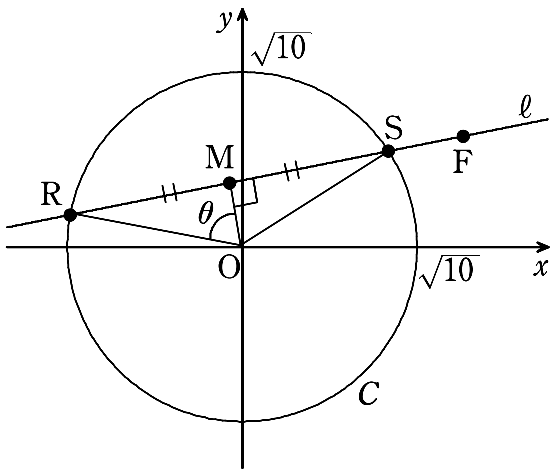
別解　(b)の$\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$は，次のように求めてもよい.

$\angle\mathrm{ROM}=\theta$とすると，$\triangle$ORSの面積$S$は，

$$S=\frac{1}{2}(\sqrt{10})^2\sin 2\theta=5\sin 2\theta$$

対称性から$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で考えれば良く，これが

最大となるのは$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである.



このとき，原点と直線ℓの距離は

$$\mathrm{OM}=\sqrt{10}\cos\theta=\sqrt{10}\cos\frac{\pi}{4}=\mathbf{\sqrt{5}}$$(ク)

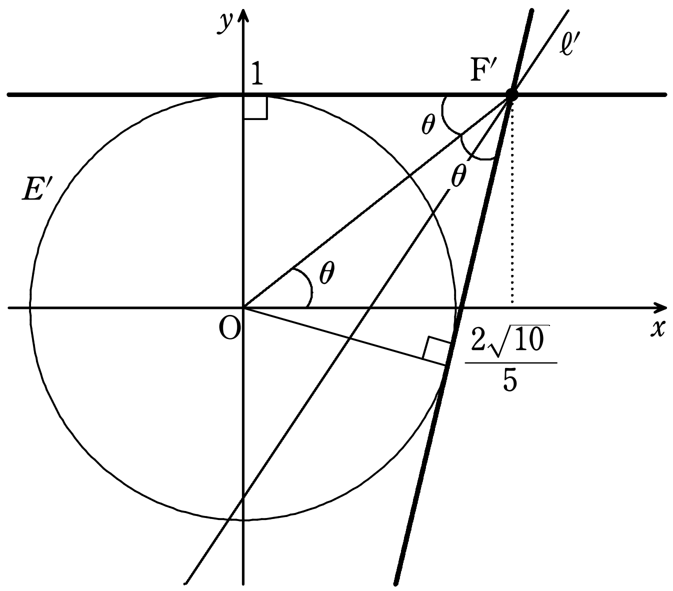
別解 (c)の a の範囲は，楕円を円に変換し，図形的に解くこともできる．

x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ 倍，y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍した座標を考える．

これにより，楕円 E が円 E'，直線 ℓ が直線 ℓ'，点 F が点 $\mathrm{F}'\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5},\ 1\right)$ に移る．

直線 OF' が x 軸正方向となす角を θ とすると，

$$\tan\theta=\frac{1}{\frac{2\sqrt{10}}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$



直線 ℓ' の傾きを a' とすると，円 E' と直線 ℓ' が共有点をもつとき，

$$0\leqq a'\leqq\tan 2\theta$$

ここで，

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$$

よって，　$0\leqq a'\leqq\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

x 軸方向に $\sqrt{10}$ 倍，y 軸方向に 2 倍してもとの座標に戻すと，楕円 E と直線 a が共有点をもつ a の範囲は，

$$0\leqq a\leqq\frac{4\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{8}{3}$$ (チツテ)

参考

xy 平面を x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍した $x'y'$ 平面について，$x'=\sqrt{10}\,x$，$y'=2y$ が成り立つから，

直線 ℓ' の方程式 : $2y'=a\sqrt{10}\,x'-4a+2 \iff a\sqrt{10}\,x'-2y'=4a-2$

円 E' の方程式 : $\dfrac{(\sqrt{10}\,x')^2}{10}+\dfrac{(2y')^2}{4}=1 \iff x'^2+y'^2=1$

よって，$\vec{\alpha}=(x',\ y')$ について，

$$\begin{cases}\ell' 上 \iff \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4a-2\\ C' 上 \iff |\vec{\alpha}|=1\end{cases}$$

である．内積について $-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\leqq\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leqq|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ が成り立つ．

加えて，$|\vec{\alpha}|$ および $\vec{\beta}$ を固定したとき，$-|\vec{a}||\vec{\beta}|\leqq\gamma\leqq|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ を満たす任意の γ に対して，$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\gamma$ となる $\vec{\alpha}$ が存在する．これらのことから，

直線 ℓ' と円 E' が共有点をもつ

$\iff \begin{cases}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4a-2\\ |\vec{\alpha}|=1\end{cases}$ を満たす $|\alpha|=1$ が存在する

$\iff -|\vec{\beta}|\leqq 4a-2\leqq|\vec{\beta}|$

となる．

Ⅱ

以下，自然対数の底は省略し，$\log_e x = \log x$ と書く．

(a)　$s=\log 3$ のとき，

$$e^s = e^{\log 3} = 3,\quad e^{2s} = e^{2\log 3} = e^{\log 3^2} = 9$$

であるから，

$$x = \log 3 - 1 + \frac{2}{9+1} = \log 3 - \frac{4}{5},$$

$$y = \frac{2\cdot 3}{9+1} - 1 = -\frac{2}{5}$$

よって，$s=\log 3$ における曲線 Γ 上の点 P は　$\left(\frac{-4}{5} + \log 3,\ -\frac{2}{5}\right)_{(\text{アイウエオ})}$

また，

$$\frac{dx}{ds} = 1 - 2(e^{2s}+1)^{-2}\cdot 2e^{2s} = 1 - \frac{4e^{2s}}{(e^{2s}+1)^2}\quad,$$

$$\frac{dy}{ds} = 2\frac{e^s(e^{2s}+1) - e^s\cdot 2e^{2s}}{(e^{2s}+1)^2} = \frac{2e^s(1-e^{2s})}{(e^{2s}+1)^2}$$

であるから，$s=\log 3$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\frac{2\cdot 3(1-9)}{(9+1)^2}}{1 - \frac{4\cdot 9}{(9+1)^2}} = \frac{-48}{100-36} = -\frac{3}{4}$$

よって，点 P における曲線 Γ の法線 ℓ の方程式は

$$y - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{3}\left\{x - \left(\log 3 - \frac{4}{5}\right)\right\}$$

$$\therefore\quad y = \frac{4}{3}(x - \log 3) + \frac{2}{3}_{(\text{カキクケ})}$$

(b)　点 Q の y 座標は

$$f(\log 3) = \frac{1}{2}e^{\log 3} + \frac{1}{2}e^{-\log 3} - 1 = \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - 1$$

$$= \frac{2}{3}_{(\text{コサ})}$$

また，　$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

であるから，　$f'(\log 3) = \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}_{(\text{シス})}$

したがって，点 Q における曲線 C の接線の方程式は

$$y - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}(x - \log 3)\qquad\therefore\quad y = \frac{4}{3}(x - \log 3) + \frac{2}{3}$$

であるから，直線 ℓ はこれに一致する．（❷$_{(\text{セ})}$）

(c)　$f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$ より，

$$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2}=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

であるから，

$$d=\int_0^{\log 3}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^{\log 3}\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\,dx$$
$$==\frac{1}{2}\Big[e^{x}-e^{-x}\Big]_0^{\log 3}=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{4}{3}}_{\text{(ソタ)}}$$

また，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left\{\left(\frac{-4}{5}+\log 3\right)-\log 3\right\}^2+\left(-\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{15}\right)^2}$$
$$=\frac{4}{15}\sqrt{9+16}=\frac{4}{3}$$

よって，　$\dfrac{d}{\mathrm{PQ}}=\mathbf{1}_{\text{(チ)}}$

別解　点Pにおける曲線Γの接線の傾きは，次のように求めることもできる．

$e^{s}=u$ とおくと，$s=\log u$ であるから，

$$x=\log u-1+\frac{2}{u^2+1},\quad y=\frac{2u}{u^2+1}-1$$

よって，

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{u}-\frac{4u}{(u^2+1)^2},\quad \frac{dy}{du}=2\cdot\frac{1\cdot(u^2+1)-u\cdot 2u}{(u^2+1)^2}=\frac{2(1-u^2)}{(u^2+1)^2}$$

$s=\log 3$ のとき，$u=e^{\log 3}=3$ であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{du}}{\dfrac{dx}{du}}=\frac{\dfrac{2(1-3^2)}{(3+1)^2}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{4\cdot 3}{(3^2+1)^2}}=-\frac{3}{4}$$

Ⅲ

$z_{n+1}=z_n+\gamma(\dot{z}_n-z_n)$ ……①

(a) $\gamma=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{8}\{(1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})i\}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}i$

よって，実部 $s=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$ (アイウ)，虚部 $t=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

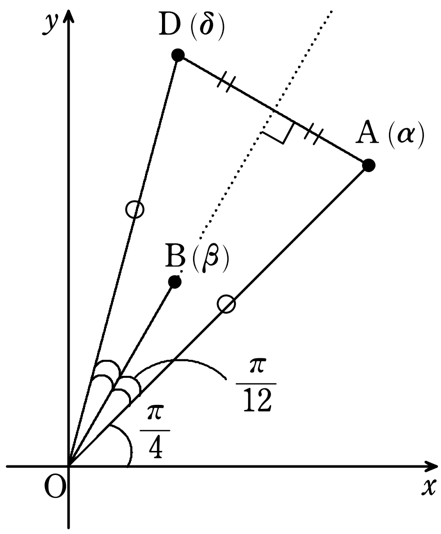
また，

$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$， $\beta=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

であるから，

$|\gamma|=\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=\dfrac{1}{2}$ (エオ)，

$\arg\gamma=\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\arg\beta-\arg\alpha=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$ (カキ)



右図から，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$\arg\dfrac{\delta-\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{2}\pi$ (クケ)

また，$\mathrm{D}(\delta)$ は点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{12}\cdot 2=\dfrac{\pi}{6}$

だけ回転させた点であるから，

$\delta=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\alpha$

$=\alpha\times\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$ (コサ)

(b) (a) より $\gamma=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ であるから，

$\gamma^n=\dfrac{1}{2^n}\left(\cos\dfrac{n\pi}{12}+i\sin\dfrac{n\pi}{12}\right)$

これが純虚数となるのは $\cos\dfrac{n\pi}{12}=0$ かつ $\sin\dfrac{n\pi}{12}\neq 0$ となるときであるから，k を整数とすると，

$\dfrac{n\pi}{12}=\dfrac{(2k+1)}{2}\pi \qquad \therefore\ n=6k+6$

これを満たす最小の自然数 n は，

$k=0$ のとき　$n=6$ (シ)

また，

$|\gamma^{-n}|=\left|\dfrac{1}{\gamma^n}\right|=2^n>2024$

2^n は n について単調増加で，$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$ であるから，これを満たす最小の自然数 n は，　$n=11$ (スセ)

以下の答案では，$\overset{\circ}{z}_n$ を $\dot{z}$ と表記する．

(c)　① より，

$$\arg(z_{n+1}-z_n)=\arg\gamma(\dot{z}_n-z_n)$$

$$=\arg\gamma+\arg(\dot{z}_n-z_n)$$

$$=\frac{\pi}{12}+\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

よって，点列 z_n は複素数平面内で実軸と $\frac{\pi}{6}$ (ソ) の角度で交わる直線上に存在する．

また，2 点 O，A を通る直線と O，z_n を通る直線のなす角を θ とすると，

$$\arg z_n+\arg\dot{z}_n=\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}\ _{(タ)}$$

したがって，帰納的にすべての自然数 n について z_n，$\dot{z}_n$ はすべて第一象限内であることが示せるので，

$$\arg z_n+\arg\dot{z}_n=\arg z_n\dot{z}_n=\frac{\pi}{2}$$

であるから，$z_n\dot{z}_n$ は純虚数であり，$|z_n|=|\dot{z}_n|$ であるから，

$$z_n\dot{z}_n=|z_n|^2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=|z_n|^2 i$$

$$\dot{z}_n=\frac{z_n\overline{z_n}}{z_n}i=i\overline{z_n}\ (⑥_{チ})\quad\cdots\cdots②$$

次に，① の両辺の共役複素数を考えると

$$\overline{z_{n+1}}=\overline{z_n+\gamma(\dot{z}_n-z_n)}=\overline{z_n}+\overline{\gamma}(\overline{\dot{z}_n}-\overline{z_n})$$

両辺に i をかけると，

$$i\overline{z_{n+1}}=i\overline{z_n}+\overline{\gamma}(i\overline{\dot{z}_n}-i\overline{z_n})$$

② を用いると，

$$z_{n+1}=z_n+\overline{\gamma}(i\cdot\overline{i\overline{z_n}}-\dot{z}_n)$$

$$=\dot{z}_n+\overline{\gamma}\times(z_n-\dot{z}_n)\ (⑤_{(ツ)})\quad\cdots\cdots③$$

③$-$① より，

$$\dot{z}_{n+1}-z_{n+1}=\dot{z}_n-z_n+(\overline{\gamma}+\gamma)(z_n-\dot{z}_n)=\dot{z}_n-z_n+2s(z_n-\dot{z}_n)$$

$$=(-2s+1)(\dot{z}_n-z_n)$$

(a) より

$$-2s+1=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+1>0$$

であるから，両辺の絶対値をとると，

$$|\dot{z}_{n+1}-z_{n+1}|=(-2s+1)|\dot{z}_n-z_n|$$

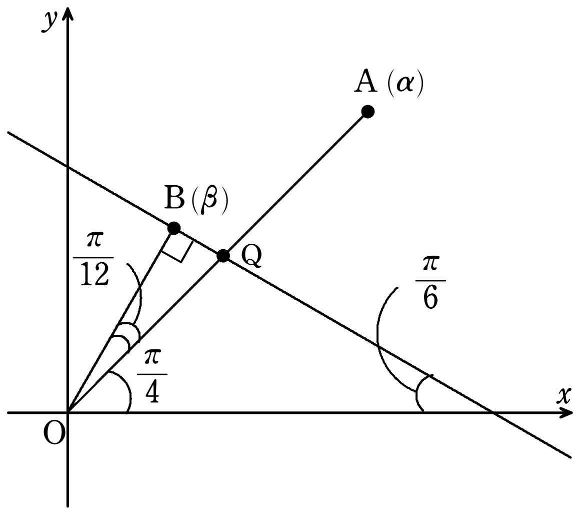
よって $|\dot{z}_n-z_n|$ は，公比 $-2s+1$ (テトナ) の等比数列をなし，$0<-2s+1<1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}|\dot{z}_n-z_n|=0\ _{(ニ)}$$

以上から，$n\longrightarrow\infty$ のとき，点 z_n は対称軸 OA に近づくため，

$$\lim_{n\to\infty}\arg z_n=\arg\alpha=\frac{\pi}{4}_{\text{(ヌ)}}$$

さらに，点 z_n が点 $\mathrm{B}(\beta)$ を通り，実軸と $\dfrac{\pi}{6}$ $\left(\text{正方向から }\dfrac{5\pi}{6}\right)$ の角度で交わる直線上に存在することから，点 z_n はこの直線と対称軸 OA の交点に近づく．この点を Q とする．



(a) より，

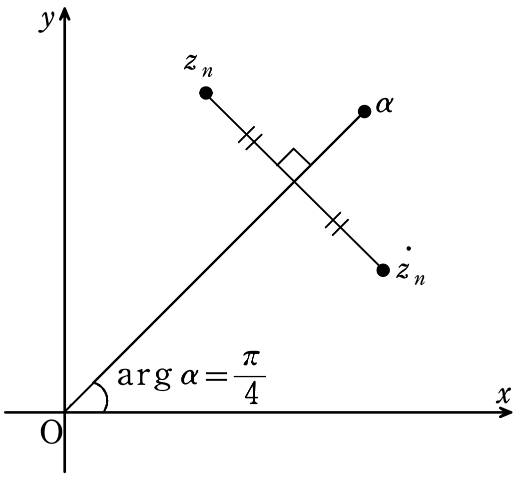
$$s=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}\ ,\ |\beta|=1$$

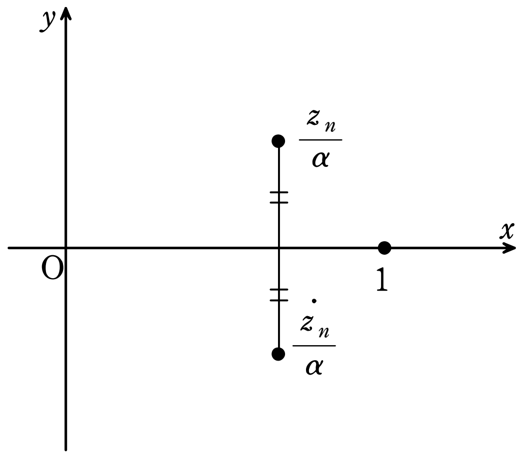
であることから，直角三角形 OQB に注目して，

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\frac{|\beta|}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{2s}_{\text{(ネノ)}}$$

別解　(c) の $\boxed{\ \text{チ}\ }$ は回転移動を用いてもよい．

3 点 α，z_n，$\dot{z}_n$ について，$\dfrac{\alpha}{\alpha}=1$，$\dfrac{z_n}{\alpha}$，$\dfrac{\dot{z}_n}{\alpha}$ は原点 O を中心に $\dfrac{1}{|\alpha|}$ 倍し，$-\arg\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものである．





よって，$\dfrac{z_n}{\alpha}$，$\dfrac{\dot{z}_n}{\alpha}$ は実軸に関して対称，すなわち共役な複素数となるから，

$$\frac{\dot{z}_n}{\alpha}=\left(\overline{\frac{z_n}{\alpha}}\right)$$

$$\dot{z}_n=\frac{\overline{z_n}}{\overline{\alpha}}\alpha=\overline{z_n}\cdot\frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}=\overline{z_n}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2=i\,\overline{z_n}\ \ (⑥_{\text{(チ)}})$$